2007 年 04 月 06 日
(2007 年 08 月 17 日 改訂)

# リーマン問題入門

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

## 目 次

# 1 はじめに

リーマン問題とは、双曲型保存則方程式に典型的な問題で、ある単純な初期値に対する初期値問題である。しかし、これはこの方程式の解の特徴を見るのに必要な話題であるし、一般の初期値に対する初期値問題の解を構成する際にも使われる重要な問題で、この方程式に関する解説書、入門書 (例えば [2]) などには、必ず最初の方にこの問題が取り上げられるべき項目である。

単独の保存則方程式に対するリーマン問題や衝撃波の話ならば、偏微分方程式の本でも追加の話題として取り上げられることがあるが、連立の保存則方程式系に対するリーマン問題の話、特に日本語による説明は、かなり古い [4] を除いてはほとんどないし、この記事にも一般の $N \times N$ の系に対するリーマン問題については書かれていない。

よって本稿は、一般の $N \times N$ の系に対するリーマン問題の解説を目標とする。

なお、日本語の用語に関しては、[6] になるべく従うこととする。

# 2 理想気体の保存則方程式系の導出

## 2.1 はじめに

この節では、1 次元双曲型保存則方程式系の代表的な例である、理想気体の 1 次元運動に関する保存則方程式系の導出をここで紹介する。

この導出過程は、後で衝撃波の説明でも必要となる。

なお、ここでは、私が最近考えている、通常説明される方法とは少し違う形の導出方法を紹介したいと思う。

## 2.2 密度と流量

ここでは、細長い管に入っている粘性のない理想気体の 1 次元的な運動 (管に沿った方向に右に行くか左に行くかだけ) を考えることにする。

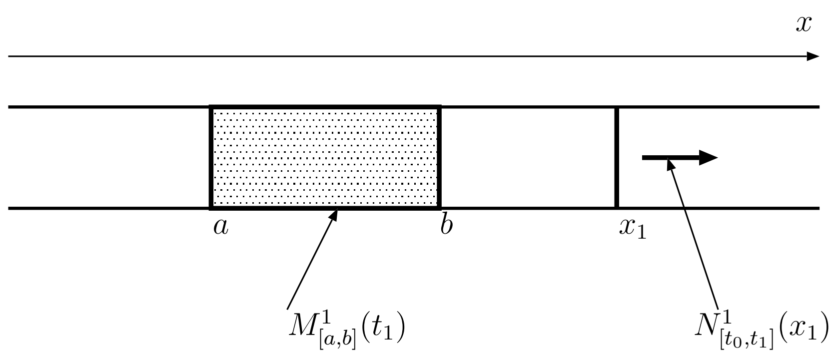



図 2.1: 細長い管の中の気体

その管に沿って $x$ 軸を考え、次のような 2 つの量をまず考える。

$$\begin{cases} M^1_{[a,b]}(t) & = \text{時刻 } t \text{ のときに、} a \leq x \leq b \text{ の間にある気体の総質量} \\ N^1_{[c,d]}(x) & = c \leq t \leq d \text{ の間に、位置 } x \text{ を右側に通過した総質量} \end{cases} \tag{2.1}$$

後者は、左側に通過した気体の質量は負の質量と考えることにする。

これらの量を局所化して、密度、流量を定義する。時刻 $t$, 位置 $x$ での単位長さあたりの気体の密度 $\rho=\rho(t,x)$、および単位時間あたりの流量 $q=q(t,x)$ を、

$$\rho(t,x)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{M^1_{[x,x+\Delta x]}(t)}{\Delta x},\quad q(t,x)=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{N^1_{[t,t+\Delta t]}(x)}{\Delta t} \tag{2.2}$$

と定義する。

この (2.1) と (2.2) の関係を明確にするために、以下のような関数 $\bar{M}^1$, $\bar{N}^1$ を導入する。

$x$ の基準点 $x_0$ と $t$ の基準時刻 $t_0$ を定めて、$\bar{M}^1$, $\bar{N}^1$ をその基準からの $M^1$, $N^1$ の値、すなわち

$$\begin{aligned}\bar{M}^1(t,x) &= \begin{cases} M^1_{[x_0,x]}(t) & (x\ge x_0 \text{ のとき}),\\ -M^1_{[x,x_0]}(t) & (x< x_0 \text{ のとき}),\end{cases}\\ \bar{N}^1(t,x) &= \begin{cases} N^1_{[t_0,t]}(x) & (t\ge t_0 \text{ のとき}),\\ -N^1_{[t,t_0]}(x) & (t< t_0 \text{ のとき})\end{cases}\end{aligned}$$

とすると、$M^1$, $N^1$ は $\bar{M}^1$, $\bar{N}^1$ の値の差

$$M^1_{[a,b]}(t)=\bar{M}^1(t,b)-\bar{M}^1(t,a),\quad N^1_{[c,d]}(x)=\bar{N}^1(c,x)-\bar{N}^1(d,x)$$

で表されるので、$\bar{M}^1$, $\bar{N}^1$ が微分可能であれば、(2.2) は

$$\begin{aligned}\rho(t,x) &= \lim_{\Delta x\to+0}\frac{\bar{M}^1(t,x+\Delta x)-\bar{M}^1(t,x)}{\Delta x}=\frac{\partial\,\bar{M}^1}{\partial\,x},\\ q(t,x) &= \lim_{\Delta t\to+0}\frac{\bar{N}^1(t+\Delta t,x)-\bar{N}^1(t,x)}{\Delta t}=\frac{\partial\,\bar{N}^1}{\partial\,t}\end{aligned} \tag{2.3}$$

となる。

また、ここから逆に $M^1_{[a,b]}(t)$, $\bar{M}^1(t,x)$ 等は、$\rho$, $q$ を用いて、

$$\begin{aligned}\bar{M}^1(t,x)=\int_{x_0}^{x}\rho(t,y)dy,\quad M^1_{[a,b]}(t)=\int_a^b\rho(t,x)dx,\\ \bar{N}^1(t,x)=\int_{t_0}^{t}q(s,x)ds,\quad N^1_{[c,d]}(x)=\int_c^d q(t,x)dt\end{aligned}$$

と書けることもわかる。

## 2.3 速度と流量

時刻 $t$ での $x$ における気体の速度を $u(t,x)$ とするが、2.2 節同様、局所化する前の量での表現を考えてみる。

速度 $u(t,x)$ に対しては位置の移動が局所化の前の量であり、時刻が $t=s$ のときに $x=\xi$ にあった気体の $t=T$ での位置を $x=X(T;s,\xi)$ と書くことにすると、$X(s;s,\xi)=\xi$ であり、また任意の $t_1\le t_2\le t_3$ に対して、

$$X(t_3;t_2,X(t_2;t_1,\xi))=X(t_3;t_1,\xi) \tag{2.4}$$

を満たす。

速度 $u(t,x)$ は、位置の時間に関する微分であるから、

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \lim_{\Delta t\to +0}\frac{X(t+\Delta t;t,x)-x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to +0}\frac{X(t+\Delta t;t,x)-X(t;t,x)}{\Delta t} \\ &= \frac{\partial X}{\partial T}(t;t,x) \end{aligned}$$

と書ける。一方で、$x=X(t;s,\xi)$ の $t$ に関する微分を考えると、(2.4) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}X(t;s,\xi) &= \lim_{\Delta t\to +0}\frac{X(t+\Delta t;s,\xi)-X(t;s,\xi)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to +0}\frac{X(t+\Delta t;t,x)-x}{\Delta t} \\ &= u(t,x)=u(t,X(t;s,\xi)) \end{aligned} \tag{2.5}$$

となるので、この式を $s$ から $T$ まで積分すれば、

$$X(T;s,\xi)=\xi+\int_s^T u(t,X(t;s,\xi))dt$$

となる。

さて、今 $c\le t\le d$ に対して $b=X(d;c,a)$、すなわち $t=c$ のときに $x=a$ にあった気体が $t=d$ のときにいる位置を $x=b$ とすると、$x=a$ をこの間に通過した質量 $N^1_{[c,d]}(a)$ は、$t=d$ のときに $x=a$ から $x=b$ までの間に存在する気体の質量に等しい。よって、

$$N^1_{[c,d]}(a)=M^1_{[a,b]}(d),\quad b=X(d;c,a) \tag{2.6}$$

となるので、$d$ を $t$, $a$ を $x$ と置き換えて、この (2.6) を $\bar{N}^1$, $\bar{M}^1$ で書き直せば、

$$\bar{N}^1(t,x) - \bar{N}^1(c,x) = \bar{M}^1(t, X(t;c,x)) - \bar{M}^1(t,x)$$

となり、この両辺を $t$ で微分すれば、(2.3), (2.5) より、

$$\begin{aligned}
q(t,x) &= \frac{\partial \bar{N}^1}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\{\bar{M}^1(t,X(t;c,x)) - \bar{M}^1(t,x)\} \\
&= \frac{\partial \bar{M}^1}{\partial t}(t,X(t;c,x)) + \frac{\partial \bar{M}^1}{\partial x}(t,X(t;c,x))\frac{\partial X}{\partial T}(t;c,x) - \frac{\partial \bar{M}^1}{\partial t}(t,x) \\
&= \frac{\partial \bar{M}^1}{\partial t}(t,X(t;c,x)) + \frac{\partial \bar{M}^1}{\partial x}(t,X(t;c,x))u(t,X(t;c,x)) - \frac{\partial \bar{M}^1}{\partial t}(t,x)
\end{aligned}$$

となるが、$c \to t-0$ とすると $X(t;c,x) \to X(t;t,x) = x$ となるので、

$$q(t,x) = \rho(t,x)u(t,x) \tag{2.7}$$

が得られる。

## 2.4 質量保存則

次に、$a \le x \le b$ での、時刻 $c \le t \le d$ の間の質量変化

$$M^1_{[a,b]}(d) - M^1_{[a,b]}(c)$$

を考える。この質量の増加分は、この間に $x = a$ に左から流入した質量 $N^1_{[c,d]}(a)$ と、$x = b$ から右へ流出した質量 $N^1_{[c,d]}(b)$ との差に等しいので、

$$M^1_{[a,b]}(d) - M^1_{[a,b]}(c) = N^1_{[c,d]}(a) - N^1_{[c,d]}(b) \tag{2.8}$$

が成り立つ。これを $\bar{M}^1$, $\bar{N}^1$ で書き下すと、

$$\begin{aligned}
&\bar{M}^1(d,b) - \bar{M}^1(d,a) - \bar{M}^1(c,b) + \bar{M}^1(c,a) \\
&\quad = \bar{N}^1(d,a) - \bar{N}^1(c,a) - \bar{N}^1(d,b) + \bar{N}^1(c,b)
\end{aligned}$$

となる。これは、任意の $a, b, c, d$ について成り立つので、$(a, b, c, d) = (x_0, x, t_0, t)$ とすれば、定義より $\bar{M}^1(t, x_0) = \bar{N}^1(t_0, x) = 0$ なので、

$$\bar{M}^1(t, x) + \bar{N}^1(t, x) = \bar{M}^1(t_0, x) + \bar{N}^1(t, x_0) \tag{2.9}$$

が得られる。

これを $t$ と $x$ で微分すれば、右辺は $x$ のみの関数と $t$ のみの関数なので $0$ となり、また (2.3), (2.7) より

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0 \tag{2.10}$$

が得られる。これは質量保存を示す微分方程式で、**連続の方程式**と呼ばれる。

なお、(2.9) は $\bar{M}^1$, $\bar{N}^1$ に対する質量保存則を意味する。

## 2.5 運動量保存則

2.4 節と同様に、今度は運動量保存則について考える。

2.2 節で質量に対して $M^1$, $N^1$, $\bar{M}^1$, $\bar{N}^1$ のように書いたものを、質量を運動量で置き換えたものを $M^2$, $N^2$, $\bar{M}^2$, $\bar{N}^2$ のように書くことにする。それを局所化したものを、ここでは $m(t, x)$, $Q(t, x)$ と書くことにする。すなわち、

$$\begin{aligned} m(t, x) &= (t, x)\ \text{での単位長さあたりの運動量} \\ &= \lim_{\Delta x \to +0} \frac{M^2_{[x, x+\Delta x]}(t)}{\Delta x} = \frac{\partial \bar{M}^2}{\partial x}, \qquad (2.11) \\ Q(t, x) &= (t, x)\ \text{での単位時間あたりでの運動量通過量} \\ &= \lim_{\Delta t \to +0} \frac{N^2_{[t, t+\Delta t]}(x)}{\Delta t} = \frac{\partial \bar{N}^2}{\partial t} \qquad (2.12) \end{aligned}$$

とする。

運動量は質量と速度の積なので、$\Delta x \approx 0$ のとき

$$M^2_{[x, x+\Delta x]}(t) \approx M^1_{[x, x+\Delta x]}(t) u(t, x)$$

となる。よって、この両辺を $\Delta x$ で割って $\Delta x \to +0$ とすれば、両辺の誤差は 0 に収束し、

$$m(t,x) = \rho(t,x)u(t,x) \tag{2.13}$$

が得られる。

2.3 節の (2.6) の関係式は、そのまま $N^1$, $M^1$ を $N^2$, $M^2$ に置き換えたものが成立し、その後の議論もそのまま成立する。よって、この場合 (2.7) に変わって

$$Q(t,x) = m(t,x)u(t,x) = \rho(t,x)(u(t,x))^2 \tag{2.14}$$

が得られる。

$a \le x \le b$, $c \le t \le d$ での運動量の変化を考えると、それは運動量の流入と流出だけではなく力積も追加されるので、

$$M^2_{[a,b]}(d) - M^2_{[a,b]}(c) = N^2_{[c,d]}(a) - N^2_{[c,d]}(b) + K$$

となる。ここで $K$ は、この部分の気体にこの時間内に与えられた力積の総量であり、(2.8) とはその点のみが異なる。

もし、この気体には力としては圧力しか働いていない (つまり外力はない) とすると、$P(t,x)$ を時刻 $t$ のときに $x$ での断面全体で左右に向く気体の圧力とすれば、圧力はどの方向にも等しく働くスカラー量であるから、$a < x < b$ の内部では圧力による力積は左右分が打ち消されるので 0 であり、よって境界で働く圧力のみがこの内部の運動量の増減に関係する。力積は、力と時間の積で得られるので、結局 $K$ は

$$K = \int_c^d P(t,a)dt - \int_c^d P(t,b)dt$$

と書けることになる。よって、2.4 節と同様に $(a,b,c,d) = (x_0, x, t_0, t)$ とすれば、

$$\bar{M}^2(t,x) + \bar{N}^2(t,x) = \bar{M}^2(t_0,x) + \bar{N}^2(t,x_0) + \int_{t_0}^t P(s,x_0)ds - \int_{t_0}^t P(s,x)ds$$

となり、これを $t$, $x$ で微分すれば、(2.11), (2.12) より、

$$m_t + Q_x = \frac{\partial^2}{\partial t \partial x} \int_{t_0}^t \{P(s,x_0) - P(s,x)\}ds = -P(t,x)_x$$

となる。よって、(2.13), (2.14) より、運動量保存則を表す方程式

$$(\rho u)_t + (\rho u^2 + P)_x = 0 \tag{2.15}$$

が得られる。

エネルギー保存則も同様に考えることができ、エネルギー密度を $E$ とすれば、運動量の場合に境界からの追加が力積であった部分が、エネルギーの場合は境界から仕事量として

$$\int_c^d P(t,a)u(t,a)dt - \int_c^d P(t,b)u(t,b)dt$$

の式で追加されるので、

$$E_t + (Eu + Pu)_x = 0$$

となる。$E$ は、気体粒子の運動エネルギーと、気体粒子の持つ内部エネルギーの和であり、単位質量あたりの内部エネルギーを $e = e(\rho, P)$ とすると

$$E = \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e$$

と書ける。よって、エネルギー保存則は、

$$\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e\right)_t + \left\{\left(\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e + P\right)u\right\}_x = 0 \tag{2.16}$$

となる。$e$ は、理想気体では標準的に

$$e = \frac{P}{(\gamma - 1)\rho} \tag{2.17}$$

という式が使われるようであり、ここで $\gamma$ は $1 < \gamma < 3$ の定数である。

この (2.10), (2.15), (2.16) の 3 本の連立微分方程式が、1 次元の理想気体の基礎的な保存則方程式系であり、この場合未知関数は、$(\rho, m, E)$ や $(\rho, u, P)$ などと考えて考察することになる。

また、圧力 $P$ が密度 $\rho$ のみによって決定するバロトロピー流 ($P=P(\rho)$、例えば等エントロピー流: $P=A\rho^\gamma$, 等温流: $P=A\rho$ など) であるという仮定を置いて、エネルギー保存則 (2.16) を除いた (2.10), (2.15) の 2 本だけで考察することもよく行われる。この場合は、$(\rho,m)$ や $(\rho,u)$ を未知関数と考える。

## 2.6 ラグランジュ座標系

2.4, 2.5 節で導いた保存則方程式は、固定座標系、いわゆるオイラー座標系での理想気体の保存則方程式であるが、流体の動きに付随する動座標系、いわゆるラグランジュ座標系での考察もよく行われていて、特に 1 次元の気体の方程式に対しては、**質量座標系** という動座標系を使うと形が綺麗になることが知られていて、ここではそれを紹介する。

質量座標とは、単に流体の運動に付随する動座標 $X=X(t;t_0,x)$ を $x$ の代わりに用いるのではなく、ある基準となる流体位置 $X_0=X(t;t_0,x_0)$ から $x$ までの質量 $M^1_{[X_0,x]}(t)$ を空間座標として用いることをいう。すなわち、

$$\begin{aligned} z &= z(t,x)=\begin{cases} M^1_{[X_0,x]}(t) & (x\geq X_0 \text{ のとき}),\\ -M^1_{[x,X_0]}(t) & (x<X_0 \text{ のとき}) \end{cases}\\ &= \bar{M}^1(t,x)-\bar{M}^1(t,X_0)=\int_{X_0}^x \rho(t,y)dy \end{aligned}$$

を $x$ の代わりの空間座標とすることになる。

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\rho(t,x)$$

なので、$\rho(t,x)>0$ であれば各 $t$ に対して $z$ は $x$ の単調増加関数、すなわち 1 対 1 に対応することとなり、$x$ の代わりに $z$ を新たな座標系と取ることができる。つまり、

$$(z,\tau)=\left(t,\int_{X_0}^x \rho(t,y)dy\right)\quad (X_0=X(t;t_0,x_0))$$

として $(t,x)$ の代わりに $(\tau,z)$ を座標系として考えるのが質量座標系である。

今、質量座標系で $f(t,x)$ が $\tilde{f}(\tau,z)$ と表されるとすると (以後、$(t,x)$ の関数を $(\tau,z)$ の関数と見る場合はこのように ˜ をつけて書き表すこととする)、

$$f(t,x) = \tilde{f}(\tau,z) = \tilde{f}\left(t, \int_{X_0}^{x} \rho(t,y)dy\right)$$

であり、(2.5), (2.10) より、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\int_{X_0}^{x}\rho(t,y)dy = \int_{X_0}^{x}\frac{\partial}{\partial t}\rho(t,y)dy - \rho(t,X_0)\frac{dX}{dt} \\
&= \int_{X_0}^{x}\{-(\rho u)_x(t,y)\}dy - \rho(t,X_0)\frac{\partial X}{\partial T}(t;t_0,x_0) \\
&= -(\rho u)(t,x) + (\rho u)(t,X_0) - \rho(t,X_0)u(t,X_0) \\
&= -\rho u, \\
\frac{\partial z}{\partial x} &= \rho
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
f_t(t,x) &= \tilde{f}_\tau + \tilde{f}_z\frac{\partial z}{\partial t} = \tilde{f}_\tau - \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{f}_z, \\
f_x(t,x) &= \tilde{f}_z\frac{\partial z}{\partial x} = \tilde{f}_z\tilde{\rho}
\end{aligned}$$

となる。これを、各保存則に適用すると、

$$\begin{aligned}
0 &= \rho_t + (\rho u)_x \\
&= \tilde{\rho}_\tau - \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{\rho}_z + (\tilde{\rho}\tilde{u})_z\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_\tau - \tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{\rho}_z + \tilde{\rho}_z\tilde{\rho}\tilde{u} + \tilde{\rho}^2\tilde{u}_z \\
&= \tilde{\rho}_\tau + \tilde{\rho}^2\tilde{u}_z, \qquad (2.18)\\
0 &= (\rho u)_t + (\rho u^2 + P)_x \\
&= (\tilde{\rho}\tilde{u})_\tau - \tilde{\rho}\tilde{u}(\tilde{\rho}\tilde{u})_z + (\tilde{\rho}\tilde{u}^2 + \tilde{P})_z\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_\tau\tilde{u} + \tilde{\rho}\tilde{u}_\tau + \tilde{\rho}^2\tilde{u}\tilde{u}_z + \tilde{P}_z\tilde{\rho} \\
&= \tilde{\rho}(\tilde{u}_\tau + \tilde{P}_z) \quad ((2.18)\text{ より}), \\
0 &= \left\{\rho\left(\frac{u^2}{2} + e\right)\right\}_t + \left\{\rho u\left(\frac{u^2}{2} + e\right) + Pu\right\}_x \\
&= \left\{\tilde{\rho}\left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \tilde{e}\right)\right\}_\tau - \tilde{\rho}\tilde{u}\left\{\tilde{\rho}\left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \tilde{e}\right)\right\}_z + \left\{\tilde{\rho}\tilde{u}\left(\frac{\tilde{u}^2}{2} + \tilde{e}\right)\right\}_z\tilde{\rho} + (\tilde{P}\tilde{u})_z\tilde{\rho}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{\tilde{\rho}\left(\frac{\tilde{u}^2}{2}+\tilde{e}\right)\right\}_\tau + \tilde{\rho}^2\tilde{u}_z\left(\frac{\tilde{u}^2}{2}+\tilde{e}\right) + (\tilde{P}\tilde{u})_z\tilde{\rho} \\
&= \left(\frac{\tilde{u}^2}{2}+\tilde{e}\right)(\tilde{\rho}_\tau + \tilde{\rho}^2\tilde{u}_z) + \tilde{\rho}\left(\frac{\tilde{u}^2}{2}+\tilde{e}\right)_\tau + (\tilde{P}\tilde{u})_z\tilde{\rho} \\
&= \tilde{\rho}\left\{\left(\frac{\tilde{u}^2}{2}+\tilde{e}\right)_\tau + (\tilde{P}\tilde{u})_z\right\} \quad ((2.18)\text{ より})
\end{aligned}
$$

となる。(2.18) を保存形にするために $\tilde{v}=1/\tilde{\rho}$ とすると、

$$
\tilde{v}_\tau = -\frac{1}{\tilde{\rho}^2}\tilde{\rho}_\tau
$$

より、質量座標系による保存則方程式系

$$
\begin{cases}
\tilde{v}_\tau - \tilde{u}_z = 0, \\
\tilde{u}_\tau + \tilde{P}_z = 0, \\
\left(\dfrac{\tilde{u}^2}{2}+\tilde{e}\right)_\tau + (\tilde{P}\tilde{u})_z = 0
\end{cases}
\tag{2.19}
$$

が得られることになる。$\tilde{e}$ は、

$$
\tilde{e} = \frac{1}{\gamma-1}\frac{\tilde{P}}{\tilde{\rho}} = \frac{\tilde{P}\tilde{v}}{\gamma-1}
$$

であるが、バロトロピー、すなわち $P$ が $\rho$ のみの関数であるとすれば、$\tilde{P}$ は $\tilde{v}$ のみの関数となり、等エントロピー流であれば $\tilde{P}=A\tilde{v}^{-\gamma}$、等温流であれば $\tilde{P}=A\tilde{v}^{-1}$ のようになって、(2.19) の最初の 2 本のみで閉じた方程式系となる。この場合この 2 本からなる保存則方程式系を、特に $P$-**system** と呼ぶことがある。

## 2.7 注意

本節では、1 次元の理想気体に関する保存則方程式の導出を行ったが、通常は $M^1$, $N^1$ のような関数から入らずに、$\rho$、$u$ などを先に定義して、そこから積分形の保存則を求めて考察する方法が取られている。

しかし、「1 点での密度」や「瞬間の速度」は本来はそれらが最初にあるものではなく、いずれもむしろ幅を持って考えたものの比の極限 (すなわち微分) として定義されるも

のであって、そういう方向から入った場合の導出をここでは行ってみた。この場合、通常では積分として現れる量が、この方法では最初に式として与えられるので積分を使う表現がほとんど出てこない。ただし、こちらの方がわかりやすいかというと必ずしもそうではなく、むしろ感覚的には通常の方がわかりやすいように思うし、考察し直す場合もそちらの方がやりやすそうである。

また、今回は 1 次元の方程式の導出のみを行ったが、少くとも通常の方法であれば多次元 (2 次元、3 次元) の場合にも拡張でき、保存則方程式の導出も全く同様に行える。ただし、その場合には発散定理等が必要となるので、ここでは 1 次元の話のみに限定した。多次元の方程式については、詳しくは流体力学の成書を参照されたい。

なお、今回の導出方法は、かなり 1 次元に強く依存した部分があり、多次元の場合には今回のような方法での導出は、詳しく検討したわけではないが、多分あまりうまくいかないだろうと思われる。

# 3 膨張波

## 3.1 はじめに

[1] では、単独の保存則方程式

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad (t > 0,\ x \in R)$$

($u = u(t,x)$ は未知、$f(u)$ は $u$ の関数として既知関数、$f''(u) > 0$) の、特に $f(u) = u^2/2$ の Burgers 方程式の解について議論した。そこに現われた膨張波、衝撃波のような解は、本稿で扱う連立の保存則方程式 (**保存則方程式系** と呼ぶ)

$$\left\{\begin{array}{ll} (u_1)_t + f_1(u_1,u_2,\ldots,u_N)_x & = 0, \\ (u_2)_t + f_2(u_1,u_2,\ldots,u_N)_x & = 0, \\ \cdots & \\ (u_N)_t + f_N(u_1,u_2,\ldots,u_N)_x & = 0 \end{array}\right. \quad (t > 0,\ x \in R) \tag{3.1}$$

($u_j = u_j(t,x) \in R$ は未知、$f_j = f_j(u_1,\ldots,u_N)$ は $u_1,\ldots,u_N$ の既知関数 $(1 \le j \le N)$) でも特徴的な解として表れ、一般的な解を構成する上でも重要な役割を果たす。

この節では、1 次元双曲型保存則方程式系に関する用語や、リーマン問題の解を構成する要素の一つである膨張波について紹介する。

## 3.2 保存則方程式系

連立の保存則方程式系 (3.1) を、まずベクトルを使って書き直す。

$$U = {}^T(u_1, u_2, \ldots, u_N) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}$$

と書き ($^T$ は転置)、$f_j(u_1, \ldots, u_N)$ を $f_j(U)$ のように書くことにする。また、

$$F(U) = {}^T(f_1(U), f_2(U), \ldots, f_N(U)) = \begin{bmatrix} f_1(U) \\ f_2(U) \\ \vdots \\ f_N(U) \end{bmatrix}$$

とすると、(3.1) は簡単に

$$U_t + F(U)_x = 0 \tag{3.2}$$

と書ける。$F(U)$ は $U$ の微分可能な関数と考えるが、その $U$ の定義域を $\Omega(\subset R^N)$ とする。

例えば、(2) で扱ったオイラー座標系の理想気体の保存則方程式の場合は、

$$\begin{aligned} &U = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \dfrac{1}{2}\rho u^2 + \rho e \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \left(\dfrac{1}{2}\rho u^2 + \rho e + P\right) u \end{bmatrix}, \\ &\Omega = \left\{(\rho, m, E);\ \rho > 0,\ E - \frac{m^2}{2\rho} > 0\right\} \end{aligned}$$

となっている。

$U$ の関数 $g(U) = g(u_1, \ldots, u_N)$ に対し、$U$ に関する微分演算子 $\nabla_U$ を

$$\nabla_U g(U) = \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}, \frac{\partial g}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial u_N}\right)$$

と定義し、$F(U)$ に対しては、

$$\nabla_U F(U) = \begin{bmatrix} \nabla_U f_1(U) \\ \nabla_U f_2(U) \\ \vdots \\ \nabla_U f_N(U) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_N} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_N}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_N}{\partial u_N} \end{bmatrix}$$

のように定める。

一般に、

$$\begin{aligned} g(U)_x &= \frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x} + \cdots + \frac{\partial g}{\partial u_N}\frac{\partial u_N}{\partial x} = \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial u_N}\right) \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial u_N}{\partial x} \end{bmatrix} \\ &= \nabla_U g(U) \frac{\partial U}{\partial x} = \nabla_U g(U) U_x \end{aligned}$$

であり、よって

$$F(U)_x = \nabla_U F(U) U_x$$

であるから、$U$ が (3.2) の滑らかな解であれば、(3.2) は、

$$U_t + A(U)U_x = 0 \tag{3.3}$$

の形に書ける ($A(U) = \nabla_U F(U)$)。

$U \in \Omega$ に対して、連立の準線形の 1 階の微分方程式 (3.3) の係数行列 $A(U)$ の固有値がすべて異なる実数であるとき、(3.3) は **双曲型** (hyperbolic) であると呼ぶ。その固有値を

$$\lambda_1(U) < \lambda_2(U) < \cdots < \lambda_N(U)$$

と書き、$\lambda_j(U)$ に対する $A(U)$ の右固有ベクトル (列ベクトル) を $r_j(U)$、左固有ベクトル (行ベクトル) を $l_j(U)$ と書くことにする:

$$A_j(U)r_j(U) = \lambda_j(U)r_j(U), \quad l_j(U)A_j(U) = \lambda_j(U)l_j(U)$$

## 3.3 膨張波

[1] で膨張波に関する議論を行っているが、この節では、それを連立方程式に関して展開する。なお、この節の内容は、行列 $A(U)$ が必ずしも $\nabla_U F(U)$ の形とは限らない、すなわち保存形ではない一般の準線形双曲型の方程式 (3.3) の場合でも成立する。

方程式 (3.3) は、スケール変換 $(t,x)\mapsto(\lambda t,\lambda x)$ ($\lambda>0$: 定数) に関して不変、すなわち $U(t,x)$ が (3.3) の解であるとき、$U(\lambda t,\lambda x)$ も (3.3) の解であり、そのスケール変換に関して不変な初期値を与えれば、そしてもしその初期値問題の解が一意的ならば、

$$U(t,x)=U(\lambda t,\lambda x)$$

が任意の $\lambda>0$ に成り立つことになり、$\lambda=1/t$ とすれば

$$U(t,x)=U\left(1,\frac{x}{t}\right)$$

つまり、そのスケール変換に関して不変な初期値に対する解 $U$ は $x/t$ の関数であることになる。このような形の解を **中心波** (centered wave) と呼ぶ。

実際に、滑らかな中心波を求めてみることにする。$V=V(\xi)\in R^N$ を 1 変数 $\xi$ の滑らかな関数で、$U(t,x)=V(x/t)$ であるとすると、

$$U_t=V'\left(\frac{x}{t}\right)\left(\frac{x}{t}\right)_t=-\frac{x}{t^2}V'\left(\frac{x}{t}\right),\quad U_x=V'\left(\frac{x}{t}\right)\left(\frac{x}{t}\right)_x=\frac{1}{t}V'\left(\frac{x}{t}\right)$$

より、(3.3) にこれを代入すると、

$$-\frac{x}{t^2}V'\left(\frac{x}{t}\right)+\frac{1}{t}A(V)V'\left(\frac{x}{t}\right)=0$$

すなわち、

$$A(V(\xi))V'(\xi)=\xi V'(\xi) \tag{3.4}$$

となる。$V'\neq 0$ であれば (3.4) は、$\xi$ が $A(V)$ の固有値で、$V'(\xi)$ がその右固有ベクトルであることを意味するので、ある $j$、およびあるスカラー値関数 $d(\xi)$ に対して、

$$\lambda_j(V(\xi))=\xi \tag{3.5}$$
$$V'(\xi)=d(\xi)r_j(V(\xi)) \tag{3.6}$$

が成り立つことになる。

この式 (3.5) は 1 本の式、(3.6) は $n$ 本の式で、合計 $(n+1)$ 本の式があることになるが、未知関数はベクトル値関数 $V(\xi)$ とスカラー値関数 $d(\xi)$、つまり $(n+1)$ 個の関数となるので、この $(n+1)$ 本の式でこれらが決定されることとなる。

(3.6) の式は $V'(\xi)$ と $r_j(V(\xi))$ が平行であることを表しているが、ベクトル $r_j(U)$ を $U\in\Omega$ 内のベクトル場と見れば、(3.6) は $V(\xi)$ がそのベクトル場の積分曲線であることを意味している。よって、(3.6) の式は $\Omega$ 内の $V(\xi)$ の軌道 ($d(\xi)$ にはよらない) を決定し、その軌道上のパラメータに関する依存性 (移動速度) を決定するのが (3.5) であると見ることができる。

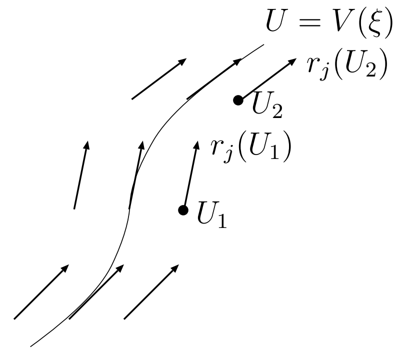



図 3.1: $\Omega$ 内のベクトル場 $r_j(U)$ と積分曲線 $U=V(\xi)$

この、$r_j(U)$ の積分曲線 $U=V(\xi)$ 上での $\lambda_j(U)$ の変化を考えてみる。(3.6) より、

$$\frac{d}{d\xi}\lambda_j(V(\xi)) = (\nabla_U\lambda_j)(V)\frac{dV}{d\xi} = d(\xi)(\nabla_U\lambda_j)(V)r_j(V)$$

となるので、もし $(\nabla_U\lambda_j)(V)r_j(V)\equiv 0$ であると $\lambda_j(V(\xi))$ は $\xi$ に関して定数となりその積分曲線上で変化できないので、(3.5) が一つの $\xi=x/t$ でしか満たされず、$(t,x)$ 平面のある領域での解とはなりえないことになる。

$\Omega$ で $\nabla_U\lambda_j(U)r_j(U)\equiv 0$ である場合は、$j$-特性方向は **線形退化** (linearly degenerate) しているといい、$\Omega$ のすべての $U$ で $\nabla_U\lambda_j(U)r_j(U)\neq 0$ である場合は、$j$-特性方向は **真性非線形** (genuinely nonlinear) であるという。真性非線形の場合は、必要ならば $r_j(U)$ の代わりに $-r_j(U)$ を考えることで、$\nabla_U\lambda_j(U)r_j(U)>0$ と仮定することにする。なお、$r_j$ をさらに正規化して、$\nabla_U\lambda_j(U)r_j(U)\equiv 1$ とすることも多い (が、ここでは単に正であるとしておく)。

線形退化と真性非線形をごく特別な場合について説明する。例えば $A(U)$ が対角行列

$$A(U) = \begin{bmatrix} \lambda_1(U) & & \text{\Large 0} \\ & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & \lambda_N(U) \end{bmatrix}$$

と対角化される場合、すなわち、方程式 (3.1) が

$$(u_j)_t + \lambda_j(u_1, \ldots, u_N)(u_j)_x = 0 \quad (1 \le j \le N) \tag{3.7}$$

の形に書ける場合で考えれば、$r_j(U) = \boldsymbol{e}_j$ ($= j$ 番目の成分が 1 で他はすべて 0 の単位ベクトル) となるので、線形退化は

$$\nabla_U \lambda_j(U) r_j(U) = \frac{\partial\,\lambda_j}{\partial\,u_j} \equiv 0$$

すなわち、$\lambda_j$ が $u_j$ によらない、ということを意味し、(3.7) が $u_j$ については線形の方程式であることになる。真性非線形は逆に、係数 $\lambda_j(U)$ が $u_j$ 自身の変化に合わせて単調に変化することを意味する。

上に述べたように、$j$-特性方向が線形退化の場合は、この $j$ に対して (3.5), (3.6) を満たす $V(x/t)$ の形の解はないことになるが、真性非線形の場合はその形の解が作られることがわかる。その形の解を $j$-**膨張波** (j-rarefaction wave) と呼ぶ。

$j$-膨張波解 $U = V(x/t)$ は、$x/t (= \xi) = c$ (定数) という直線上では定ベクトル $V(c)$ に等しく、この直線は、(3.5) より $c = \xi = \lambda_j(V(c))$ であるので $x = \lambda_j(V(c))t$、すなわち $j$-特性曲線になっている。なお一般に、(3.3) の解 $U = U(t,x)$ に対して、$(t,x)$ 平面上の曲線 $x = x(t)$ が $j$-**特性曲線** ($j$-charcteristic curve) であるとは、

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_j(U(t,x))$$

を満たすことを意味する。

つまり、$j$-膨張波は、

> $j$-特性曲線がすべて (一点を通るような) 直線になっていて、その直線上で $U$ が一定であるような解であり、それらの直線群の横断に対して、$U$ は相空間 $\Omega$ 上でベクトル場 $r_j(U)$ の積分曲線上を動く

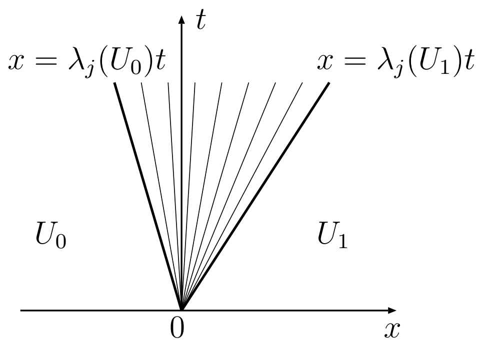
ことが言える。

$U_0 \in \Omega$ を一つ指定すると、$U_0$ を通る $r_j(U)$ に対する積分曲線が一つ決まる。その曲線の、$U_0$ から始まって $\lambda_j(U)$ の増加する方向の部分 (半曲線) を $j$-**膨張波曲線** ($j$-rarefaction wave curve) と呼び、$R_j(U_0)$ と書く。

定数ベクトルは (3.3) の解であるから、単純な $j$-膨張波解は、$U_1 \in R_j(U_0)$ に対して次の形の関数である:

$$U(t,x) = \begin{cases} U_0 & (x < \lambda_j(U_0)t), \\ V\left(\dfrac{x}{t}; U_0\right) & (\lambda_j(U_0)t \le x \le \lambda_j(U_1)t) \\ U_1 & (x > \lambda_j(U_1)t) \end{cases} \tag{3.8}$$

ここで、$V(\xi; U_0)$ は、$V(\xi) \in R_j(U_0)$, $\lambda_j(V(\xi)) = \xi$ を満たす関数である。



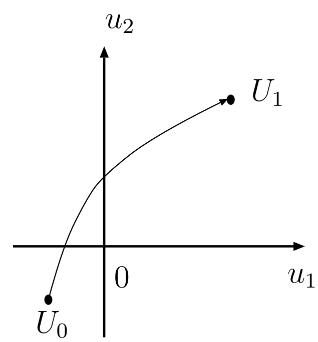




図 3.2: 膨張波 ($(t,x)$ 平面上での表現)　図 3.3: 膨張波 ($U$ 平面上での動き)

この解 (3.8) は、(3.3) のスケール変換不変な初期値

$$U(0,x) = \begin{cases} U_0 & (x < 0) \\ U_1 & (x > 0) \end{cases} \tag{3.9}$$

に対する初期値問題の解である。

一般に、$U_0, U_1 \in \Omega$ に対して、(3.9) を初期値とする (3.2) の初期値問題を**リーマン問題** (Riemann problem) という。$U_1 \in R_1(U_0)$ とは限らない一般の $U_0, U_1$ に対するリーマン問題の解は、膨張波と不連続な解と定数ベクトルによって構成される。

なお、上の膨張波解 (3.8) は、定数ベクトルや膨張波自身は滑らかな関数 ($C^1$) であるし、定数ベクトルと膨張波の接続部分 ($x = \lambda_j(U_0)t$, $x = \lambda_j(U_1)t$ 上) では連続になっ

ているが、この接続部分では微分可能ではない。この微分可能性のない解や、不連続な関数を解とみなすには、弱解という概念が必要となる。これについては、4 章で説明する。

## 3.4 リーマン不変量

3.3 節の膨張波曲線を求めるために、ベクトル場 $r_j(U)$ の積分曲線を求める常微分方程式

$$\begin{cases} U'(s) = r_j(U(s)), \\ U(0) = U_0 \end{cases} \tag{3.10}$$

を解いてパラメータ $s$ を消去すると、$w(U) = w(U_0)$ のような形の式が $(N-1)$ 個現れることが知られている。これらはリーマン不変量と呼ばれていて、これによりその積分曲線が表現される。この節ではこれを見てみることにする。

今、$\Omega$ 上のスカラー値関数 $w(U)$ が、

$$\nabla_U w(U) r_j(U) \equiv 0$$

を満たすとき、この $w(U)$ を $j$**-リーマン不変量** ($j$-Riemann invariant) と呼ぶ。

(3.6) の解 $V(\xi)$ に対し、

$$\frac{d}{d\xi} w(V(\xi)) = (\nabla_U w)(V(\xi))V'(\xi) = d(\xi)(\nabla_U w)(V(\xi)) r_j(V(\xi) = 0$$

となるので、この積分曲線上 $j$-リーマン不変量は定数となる。$j$-リーマン不変量は、次の命題 3.1 に見られるように実質的に $(N-1)$ 個が存在する。

### 命題 3.1

$r(U)$ が $\Omega$ 内で滑らかで、かつ 0 ではないベクトルであるとき、

1. $\nabla_U w_1(U), \ldots, \nabla_U w_{N-1}(U)$ が一次独立で、

$$\nabla_U w_j(U) r(U) \equiv 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

を満たすような、Ω 上の $(N-1)$ 個のスカラー関数 $w_1(U)$,...,$w_{N-1}(U)$ が存在する。

2. Ω 上のスカラー関数 $\tilde{w}(U)$ が

$$\nabla_U \tilde{w}(U) r(U) \equiv 0 \quad (\text{in } \Omega)$$

を満たすならば、$\tilde{w}(U)$ は 1. の $w_1(U), \ldots w_{N-1}(U)$ の関数となる:

$$\tilde{w}(U) = F(w_1(U), \ldots, w_{N-1}(U))$$

この命題の証明 (説明) は、A 節で行う。

ベクトル場 $r_j(U)$ の積分曲線上 $j$-リーマン不変量は定数であるが、逆に $j$-リーマン不変量を定数にするものとして $r_j$ の積分曲線が得られることを示そう。

$(N-1)$ 個の $j$-リーマン不変量 $w_1(U), \ldots, w_{N-1}(U)$ は、$\nabla_U w_1(U), \ldots, \nabla_U w_{N-1}(U)$ が線形独立であるから、

$$\{U \in \Omega;\ w_1(U) = w(U_0),\ \ldots,\ w_{N-1}(U) = w_{N-1}(U_0)\} \tag{3.11}$$

という集合は、1 次元の (1 つのパラメータによる) 曲線を与える (ただし一般には曲線群となる)。よって、それを $U = U(s)$ ($s$ は実数のパラメータ) とすれば、すべての $j$ に対して $w_j(U(s)) = w_j(U_0)$ より、$s$ で微分すれば

$$0 = \frac{d}{ds} w_j(U(s)) = \nabla_U w_j(U(s)) U'(s)$$

となるので、

$$U'(s) \in \langle \nabla_U w_1(U(s)), \ldots, \nabla_U w_{N-1}(U(s)) \rangle^{\perp} = \langle r_j(U(s)) \rangle$$

となるので、$U'(s)$ は $r_j(U(s))$ と平行となり、$U(s)$ が $r_j(U)$ の積分曲線上を動くことになる。

しかも、命題 3.1 の 1. より (詳しくは A 節で示す通り)、もう一つ $\nabla_U w_N(U) r_j(U) \neq 0$ となる関数 $w_N(U)$ を追加すれば、$\nabla_U w_1(U)$,...,$\nabla_U w_N(U)$ が線形独立となり、よって

$U$ と $(w_1, \ldots, w_N)$ が 1 対 1 となるので、不変集合 (3.11) は確かに 1 本の曲線であることがわかる。

なお、$j$-膨張波曲線 $R_j(U_0)$ は、微分方程式 (3.10) の解のうち、$\lambda_j(U)$ が増加する方向であるが、真性非線形性の仮定により

$$\frac{d}{ds}\lambda_j(U(s)) = \nabla_U \lambda_j(U(s))U'(s) = (\nabla_U \lambda_j \cdot r_j)(U(s)) > 0$$

であるから、(3.10) を満たす曲線のうち、$s \geq 0$ の部分であることがわかる。

## 3.5 オイラー座標系の理想気体の場合の例

ここでは、2.4, 2.5 節で紹介した、オイラー座標系での理想気体の保存則方程式系 (2.10), (2.15), (2.16) に対する固有値、固有ベクトル、リーマン不変量、膨張波解を計算する。

まず、

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P)_x = 0, \\ \left(\dfrac{1}{2}\rho u^2 + \rho e\right)_t + \left\{\left(\dfrac{1}{2}\rho u^2 + \rho e + P\right) u\right\}_x = 0, \end{cases} \qquad \left(e = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}\right) \tag{3.12}$$

を扱うが、そのために $(\rho, m, E)$ で考えても、$(\rho, u, P)$ で考えても、それらには本質的な違いはないことをまず示す。

### 命題 3.2

準線形方程式系 (3.3) が $U = G(W)$ $(|\nabla_W G(W)| \neq 0)$ によって

$$W_t + B(W)W_x = 0 \tag{3.13}$$

と変換されるとき、(3.13) に対する固有値 $\mu_j(W)$, 左右の固有ベクトル $\alpha_j(W)$, $\beta_j(W)$, $j$-リーマン不変量 $z(W)$ は、以下のように得られる:

$$\begin{aligned} &\mu_j(W) = \lambda_j(G(W)), \\ &\alpha_j(W) = l_j(G(W))\nabla_W G(W), \quad \beta_j(W) = (\nabla_W G(W))^{-1} r_j(G(W)), \\ &z(w) = w(G(W)) \quad (w(U) \text{ は (3.3) の } j\text{-リーマン不変量}) \end{aligned}$$

また、

$$\nabla_W \mu_j(W)\beta_j(W) = \nabla_U \lambda_j(U) r_j(U)$$

が成り立ち、よって線形退化性、真性非線形性もこの変換で不変である。

証明

(3.3) に $U = G(W)$ を代入すると

$$U_t = \nabla_W G(W) W_t, \quad U_x = \nabla_W G(W) W_x$$

より、(3.13) の $B(W)$ は

$$B(W) = (\nabla_W G(W))^{-1} A(G(W)) \nabla_W G(W)$$

となる。よって $B(W)$ の固有値は $\mu_j = \lambda_j(G(W))$ であり、固有ベクトルは

$$\begin{aligned}
&\mu_j(W) l_j(G(W)) \nabla_W G(W) - l_j(G(W)) \nabla_W G(W) B(W) \\
&\quad = \ \{\lambda_j(G(W)) l_j(G(W)) - l_j(G(W)) A(G(W))\} \nabla_W G(W) = 0, \\
&\mu_j(W)(\nabla_W G(W))^{-1} r_j(G(W)) - B(W)(\nabla_W G(W))^{-1} r_j(G(W)) \\
&\quad = \ (\nabla_W G(W))^{-1} \{\lambda_j(G(W)) r_j(G(W)) - A(G(W)) l_j(G(W))\} = 0
\end{aligned}$$

より、$\alpha_j = l_j \nabla_W G$, $\beta_j = (\nabla_W G)^{-1} r_j$ となる。

$w(U)$ を (3.3) の $j$-リーマン不変量とし、$z(W) = w(G(W))$ とすると、

$$\begin{aligned}
\nabla_W z(W) \beta_j(W) &= \nabla_U w(G(W)) \nabla_W G(W) (\nabla_W G(W))^{-1} r_j(G(W)) \\
&= \nabla_U w(G(W)) r_j(G(W)) = 0
\end{aligned}$$

となるので、$z(W)$ が $j$-リーマン不変量となる。また、

$$\nabla_W \mu_j \cdot \beta_j = \nabla_U \lambda_j(G) \nabla_W G (\nabla_W G)^{-1} r_j(G) = \nabla_U \lambda_j(G) r_j(G)$$

となるので、(3.3) と (3.13) の線形退化性、真性非線形性も変わらない。∎

この命題 3.2 より、(3.12) を $(\rho, u, P)$ の式に直して考えてもよいので、それで考える。(3.12) の第 1 式、第 2 式より、

$$0 = \rho_t u + \rho u_t + (\rho u)_x u + \rho u u_x + P_x = \rho(u_t + u u_x) + P_x$$

となるので $u$ に関する方程式は

$$u_t + u u_x + \frac{1}{\rho} P_x = 0$$

となる。第 3 式は $\rho e = P/(\gamma - 1)$ より、

$$\begin{aligned}
0 &= \left(\frac{1}{2}\rho u^2\right)_t + \frac{1}{\gamma - 1} P_t + \left(\frac{1}{2}\rho u^3\right)_x + \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} P u\right)_x \\
&= \frac{u^2}{2}\{\rho_t + (\rho u)_x\} + \rho u(u_t + u u_x) + \frac{1}{\gamma - 1} P_t + \frac{\gamma}{\gamma - 1}(P_x u + P u_x) \\
&= -u P_x + \frac{1}{\gamma - 1} P_t + \frac{\gamma}{\gamma - 1}(P_x u + P u_x) \\
&= \frac{1}{\gamma - 1} P_t + \frac{\gamma}{\gamma - 1} P u_x + \frac{1}{\gamma - 1} P_x u
\end{aligned}$$

となるので、結局 $U = {}^T(\rho, u, P)$ の方程式

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \\ P \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \dfrac{1}{\rho} \\ 0 & \gamma P & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ P \end{bmatrix}_x = 0 \tag{3.14}$$

が得られる。この場合、$\Omega$ は

$$\Omega = \{ {}^T(\rho, u, P);\ \rho > 0,\ P > 0\}$$

となる。

$$\begin{vmatrix} \lambda - u & -\rho & 0 \\ 0 & \lambda - u & -\dfrac{1}{\rho} \\ 0 & -\gamma P & \lambda - u \end{vmatrix} = (\lambda - u)\left\{(\lambda - u)^2 - \frac{\gamma P}{\rho}\right\}$$

より、固有値は

$$\lambda_1 = u - C, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + C \qquad \left( C = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \right)$$

固有ベクトルは $r = c_0{}^T(1, (\lambda - u)/\rho, (\lambda - u)^2)$ ととればよいので、

$$r_1 = \begin{bmatrix} -\rho \\ C \\ -\gamma P \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_3 = \begin{bmatrix} \rho \\ C \\ \gamma P \end{bmatrix}$$

となる (これらは命題 3.2 の $\beta_j$ にあたる)。

$C_\rho = -C/(2\rho)$, $C_P = C/(2P)$ なので、

$$\nabla_U \lambda_1 = \left( \frac{C}{2\rho}, 1, -\frac{C}{2P} \right), \quad \nabla_U \lambda_3 = \left( -\frac{C}{2\rho}, 1, \frac{C}{2P} \right)$$

となり、

$$\nabla_U \lambda_1 \cdot r_1 = -\frac{C}{2} + C + \frac{\gamma}{2} C = \frac{\gamma + 1}{2} C > 0, \quad \nabla_U \lambda_3 \cdot r_3 = \frac{\gamma + 1}{2} C > 0 \tag{3.15}$$

となるので 1-特性方向、3-特性方向は真性非線形である。

一方、$\nabla_U \lambda_2 = (0, 1, 0)$ より $\nabla_U \lambda_2 \cdot r_2 \equiv 0$ であるので、2-特性方向は線形退化となる。よって、2-特性方向には膨張波解は存在しない。

次にリーマン不変量を求める。1-リーマン不変量は、

$$\nabla_U w \cdot r_1 = -\rho w_\rho + C w_u - \gamma P w_P = -(\rho w_\rho - C w_u + \gamma P w_P) = 0$$

となるので、微分方程式 ($r_1$ の積分曲線を与える方程式)

$$\begin{aligned} &\frac{d\rho}{ds} = \rho, \quad \frac{du}{ds} = -C, \quad \frac{dP}{ds} = \gamma P, \\ &(\rho(0), u(0), P(0)) = (\rho_0, u_0, P_0) \end{aligned} \tag{3.16}$$

を解くと、

$$\rho = \rho_0 e^s, \quad P = P_0 e^{\gamma s} \tag{3.17}$$

となる。よって、

$$C = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}} e^{\theta s} = C_0 e^{\theta s} \quad \left(\theta = \frac{\gamma - 1}{2}\right) \tag{3.18}$$

より

$$\frac{du}{ds} = -C_0 e^{\theta s}$$

となるので、よって

$$u = u_0 - \frac{C_0}{\theta}(e^{\theta s} - 1) \tag{3.19}$$

となる。

Rimann 不変量はこの積分曲線 (3.17), (3.19) 上不変で $w(\rho, u, P) = w(\rho_0, u_0, P_0)$ となるものだから、(3.17) で $s$ を消去すると、

$$\frac{P}{P_0} = e^{\gamma s} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

より、

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma}$$

となるので、$w = P/\rho^\gamma$ が一つの 1-リーマン不変量である。

また、(3.18), (3.19) より

$$u_0 + \frac{C_0}{\theta} = u + \frac{C_0}{\theta} e^{\theta s} = u + \frac{C}{\theta}$$

となるので、$w = u + C/\theta$ がもうひとつの 1-リーマン不変量となる。$w = \rho$ とすると、

$$\nabla_U w \cdot r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r_1 = 1$$

であるから、この 2 つのリーマン不変量に $\rho$ を加えると、この $(P/\rho^\gamma, u + C/\theta, \rho)$ は相空間 $\Omega$ 上で $U = {}^T(\rho, u, P)$ は 1 対 1 に対応する。

同様に、3-リーマン不変量の場合は、(3.17) と

$$u = u_0 + \frac{C_0}{\theta}(e^{\theta s} - 1)$$

とより、$P/\rho^\gamma$ と $u - C/\theta$ が 3-リーマン不変量であり、

$$\nabla_U \rho r_3 = 1$$

なので、$(P/\rho^\gamma, u - C/\theta, \rho)$ と $U$ は 1 対 1 に対応する。

2-リーマン不変量は、

$$\nabla_U w \cdot r_2 = w_\rho = 0$$

より、$u$, $P$ が 2-リーマン不変量であり、同様に $\rho$ をつけ加えると $U$ と 1 対 1 に対応する (この場合は $U$ 自身になる)。

1-膨張波曲線 $R_1(U_0)$ は、

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma}, \quad u + \frac{C}{\theta} = u_0 + \frac{C_0}{\theta}$$

を満たしながら $\lambda_1(U) = u - C$ の増加方向に進む。(3.16) より、

$$\frac{d}{ds}\lambda_1 = \nabla_U \lambda_1(U(s))U'(s) = -\nabla_U \lambda_1(U(s))r_1(U(s)) < 0$$

となるので、$s$ の減少する方向が $R_1(U_0)$ の伸びる方向。よって、$s \leq 0$ で、

$$\rho = \rho_0 e^s \leq \rho_0, \quad P = P_0 e^{\gamma s} \leq P_0, \quad u = u_0 - \frac{C_0}{\theta}(e^{\theta s} - 1) \geq u_0$$
$$\left(\theta = \frac{\gamma - 1}{2} > 0\right)$$

となるので、結局 $R_1(U_0)$ は、

$$\begin{cases} \dfrac{P}{\rho^\gamma} = \dfrac{P_0}{\rho_0^\gamma}, \\ u + \dfrac{C}{\theta} = u_0 + \dfrac{C_0}{\theta} \end{cases} \quad (\rho \leq \rho_0, \quad P \leq P_0, \quad u \geq u_0)$$

またはパラメータ表示により、

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 e^s, \\ u = u_0 - \dfrac{C_0}{\theta}(e^{\theta s} - 1), \\ P = P_0 e^{\gamma s} \end{cases} \quad (s \leq 0) \tag{3.20}$$

と表される。

ここで、$s = -\delta$ とすれば $\delta \geq 0$ で、丁度

$$\frac{dU}{d\delta} = \begin{bmatrix} -\rho_0 e^{-\delta} \\ C_0 e^{-\theta\delta} \\ -\gamma P_0 e^{-\gamma\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \\ C \\ -\gamma P \end{bmatrix} = r_1(U) \quad \left(C = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} = C_0 e^{-\theta\delta}\right)$$

となる。

また、1-膨張波 $U = U(t, x)$ は、(3.8) より $\lambda_1(U) = x/t$ を満たす必要があるので、$\delta$ によるパラメータ表示の式を代入すれば、

$$\begin{aligned} \lambda_1(U(\delta)) &= u - C = u_0 - \frac{C_0}{\theta}(e^{-\theta\delta} - 1) - \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \\ &= u_0 + \frac{C_0}{\theta} - \frac{C_0}{\theta} e^{-\theta\delta} - C_0^e{-}\theta\delta = u_0 + \frac{C_0}{\theta} - \frac{1+\theta}{\theta} C_0 e^{-\theta\delta} \\ &= \frac{x}{t} \end{aligned}$$

となるので、

$$e^{-\theta\delta} = \frac{\theta}{1+\theta}\frac{1}{C_0}\left(u_0 + \frac{C_0}{\theta} - \frac{x}{t}\right)$$

より

$$e^{-\delta} = \left\{\frac{\theta}{1+\theta}\frac{1}{C_0}\left(u_0 + \frac{C_0}{\theta} - \frac{x}{t}\right)\right\}^{1/\theta} \tag{3.21}$$

となる。これを、(3.20) ($s = -\delta$) に代入すれば、1-膨張波解を $(t, x)$ の式で表すことができることになる。容易にわかる通り、$u$ は $x/t$ の一次式になる。より詳しく見れば、

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \frac{C_0}{\theta} - \frac{C_0}{\theta}e^{-\theta\delta} \\ &= u_0 + \frac{C_0}{\theta} - \frac{1}{1+\theta}\left(u_0 + \frac{C_0}{\theta} - \frac{x}{t}\right) \\ &= \frac{\theta}{1+\theta}\left(u_0 + \frac{C_0}{\theta}\right) + \frac{1}{1+\theta}\frac{x}{t} \end{aligned}$$

のようになる。

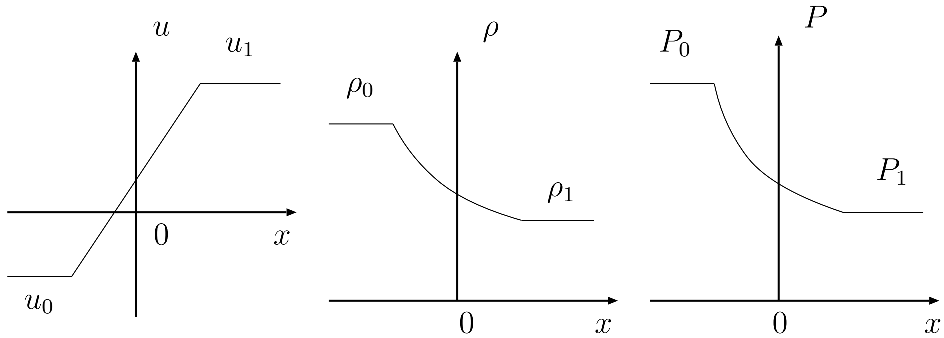



図 3.4: ある $t > 0$ に対する膨張波解のグラフ

同様にして、3-膨張波曲線 $R_3(U_0)$ は、

$$\begin{cases} \dfrac{P}{\rho^\gamma} = \dfrac{P_0}{\rho_0^\gamma}, \\ u - \dfrac{C}{\theta} = u_0 - \dfrac{C_0}{\theta} \end{cases} \qquad (\rho \geq \rho_0, \quad P \geq P_0, \quad u \geq u_0)$$

またはパラメータ表示により

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 e^s, \\ P = P_0 e^{\gamma s}, \\ u = u_0 + \dfrac{C_0}{\theta}(e^{\theta s} - 1) \end{cases} \qquad (s \geq 0) \tag{3.22}$$

と表される。こちらは、$s = \delta$ $(\delta \geq 0)$ でそのまま $dU/d\delta = r_2(U)$ となり、

$$\begin{aligned} \lambda_2(U(\delta)) &= u + C = u_0 - \frac{C_0}{\theta} + \frac{C_0}{\theta}e^{\theta\delta} + C_0 e^{\theta\delta} \\ &= u_0 - \frac{C_0}{\theta} + \frac{1+\theta}{\theta}C_0 e^{\theta\delta} \\ &= \frac{x}{t} \end{aligned}$$

となるので、

$$e^\delta = \left\{ \frac{\theta}{1+\theta}\frac{1}{C_0}\left(-u_0 + \frac{C_0}{\theta} + \frac{x}{t}\right)\right\}^{1/\theta}$$

を (3.22) $(s = \delta)$ に代入すれば 3-膨張波を $x/t$ で表せる。この場合も $u$ は $x/t$ の一次式であり、

$$u = \frac{\theta}{1+\theta}\left(u_0 - \frac{C_0}{\theta}\right) + \frac{1}{1+\theta}\frac{x}{t}$$

となる。

## 3.6 ラグランジュ座標系の理想気体の場合の例

次に、2.6 節のラグランジュ座標系での方程式系 (2.19) に対して、同様の考察を行う。

ここでは、(2.19) は　は外して、また $(\tau, z)$ も $(t, x)$ と書くことにする。

まず、(2.19) を $U = {}^T(v, u, P)$ に関する準線形の方程式系に書き直す。$e = Pv/(\gamma - 1)$ であるから、最後のエネルギー保存の方程式は、

$$0 \;=\; uu_t + \frac{1}{\gamma-1}P_t v + \frac{1}{\gamma-1}Pv_t + P_x u + Pu_x$$

$$
\begin{aligned}
&= u(u_t + Px) + \frac{1}{\gamma-1}P_t v + \frac{1}{\gamma-1}Pu_x + Pu_x \\
&= \frac{1}{\gamma-1}P_t v + \frac{\gamma}{\gamma-1}Pu_x
\end{aligned}
$$

となるので、結局この場合は、

$$
\begin{bmatrix} v \\ u \\ P \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\dfrac{\gamma P}{v} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \\ P \end{bmatrix}_x = 0
$$

となる。

$$
\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -\dfrac{\gamma P}{v} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda\left(\lambda^2 - \frac{\gamma P}{v}\right)
$$

より、固有値は

$$
\lambda_1 = -\frac{C}{v}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \frac{C}{v} \quad (C = \sqrt{\gamma P v})
$$

固有ベクトルは $r = c_1{}^T(1, -\lambda, -\lambda^2)$ ととればよいので、

$$
r_1 = \begin{bmatrix} v \\ C \\ -\gamma P \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad r_3 = \begin{bmatrix} -v \\ C \\ \gamma P \end{bmatrix}
$$

となる。$(C/v)_v = -C/(2v^2)$, $(C/v)_P = C/(2vP)$ より、

$$
\nabla_U \lambda_1 = \left(\frac{C}{2v^2}, 0, -\frac{C}{2vP}\right), \quad \nabla_U \lambda_2 = 0, \quad \nabla_U \lambda_3 = \left(-\frac{C}{2v^2}, 0, \frac{C}{2vP}\right)
$$

となり、2-特性方向は線形退化、

$$
\nabla_U \lambda_1 \cdot r_1 = \frac{C}{2v} + \frac{\gamma C}{2v} = \frac{\gamma+1}{2v}C > 0, \quad \nabla_U \lambda_3 \cdot r_3 = \frac{\gamma+1}{2v}C > 0 \tag{3.23}
$$

なので、1-特性方向、3-特性方向は真性非線形となる。

リーマン不変量は、2-リーマン不変量は

$$\nabla_U w \cdot r_2 = w_v = 0$$

より $u$, $P$ が 2-リーマン不変量で、1-リーマン不変量は、

$$\nabla_U w \cdot r_1 = v w_v + C w_u - \gamma P w_P = 0$$

より、常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{ds} = v, \quad \dfrac{du}{ds} = C, \quad \dfrac{dP}{ds} = -\gamma P \quad \left(\dfrac{dU}{ds} = r_1(U)\right) \\ (v(0), u(0), P(0)) = (v_0, u_0, P_0) \end{cases}$$

を解くと、$v = v_0 e^s$, $P = P_0 e^{-\gamma s}$ で、

$$\frac{du}{ds} = C = \sqrt{\gamma P v} = C_0 e^{-\theta s}$$

より

$$u = u_0 - \frac{C_0}{\theta}(e^{-\theta s} - 1)$$

となるので、

$$\frac{P}{P_0} = \left(\frac{v}{v_0}\right)^{-\gamma}, \quad u + \frac{C}{\theta} = u_0 + \frac{C_0}{\theta}$$

より、$Pv^\gamma$, $u+C/\theta$ が 1-リーマン不変量、同様にして 3-リーマン不変量は $Pv^\gamma$, $u-C/\theta$ がそれであることがわかり、よってリーマン不変量は、ラグランジュ座標とオイラー座標で不変であることがわかる。また、

$$\nabla_U v \cdot r_j = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r_j \neq 0 \quad (\pm v \text{ または } 1)$$

であるので、上の $j$-リーマン不変量に $v$ を追加すると、それが相空間 $\Omega$ 上で $U$ と 1 対 1 に対応する。

このパラメータに関しては、

$$\frac{d}{ds}\lambda_1(U) = \nabla_U \lambda_1(U)U'(s) = \nabla_U \lambda_1(U) r_1(U(s)) > 0, \quad \frac{d}{ds}\lambda_3(U) < 0$$

なので、1-膨張波曲線 $R_1(U_0)$ は $s > 0$ で得られ、よって、

$$\begin{cases} Pv^\gamma = P_0 v_0^\gamma, \\ u + \dfrac{C}{\theta} = u_0 + \dfrac{C_0}{\theta} \end{cases} \quad (v \geq v_0, \quad , P \leq P_0, \quad u \geq u_0)$$

またはパラメータ表示により、

$$\begin{cases} v = v_0 e^s, \\ u = u_0 - \dfrac{C_0}{\theta}(e^{-\theta s} - 1), \quad\quad (s \geq 0) \\ P = P_0 e^{-\gamma s} \end{cases} \tag{3.24}$$

と表され、1-膨張波曲線 $R_3(U_0)$ は、

$$\begin{cases} Pv^\gamma = P_0 v_0^\gamma, \\ u - \dfrac{C}{\theta} = u_0 - \dfrac{C_0}{\theta} \end{cases} \quad (v \leq v_0, \quad , P \geq P_0, \quad u \geq u_0)$$

またはパラメータ表示により、

$$\begin{cases} v = v_0 e^s, \\ u = u_0 + \dfrac{C_0}{\theta}(e^{-\theta s} - 1), \quad\quad (s \leq 0) \\ P = P_0 e^{-\gamma s} \end{cases} \tag{3.25}$$

と表される。

この $R_1(U_0)$ に対しては $s = \delta$、$R_3(U_0)$ に対しては $s = -\delta$ とすれば、いずれの場合も $\delta \geq 0$ で、

$$\frac{dU}{d\delta} = r_j(U)$$

を満たす。また、膨張波解を $(t,x)$ で表わすために、(3.24) $(s=\delta)$ を $\lambda_1(U)=x/t$ に代入すれば、

$$\lambda_1(U) = -\frac{C}{v} = -\frac{C_0 e^{-\theta\delta}}{v_0 e^{\delta}} = -\frac{C_0}{v_0} e^{-(1+\theta)\delta} = \frac{x}{t}$$

より、

$$e^{-\delta} = \left(-\frac{v_0}{C_0}\frac{x}{t}\right)^{1/(1+\theta)}$$

となる。これを (3.24) $(s=\delta)$ に代入すれば 1-膨張波が $(t,x)$ の式で表される。この場合は、オイラー座標の場合とは異なり、$u$ は $x/t$ の一次式とはならない。

3-膨張波の方も、(3.25) $(s=-\delta)$ を $\lambda_3(U)=x/t$ に代入すれば、

$$\lambda_3(U) = \frac{C}{v} = \frac{C_0 e^{\theta\delta}}{v_0 e^{-\delta}} = \frac{C_0}{v_0} e^{(1+\theta)\delta} = \frac{x}{t}$$

より、

$$e^{\delta} = \left(\frac{v_0}{C_0}\frac{x}{t}\right)^{1/(1+\theta)}$$

となり、これを (3.25) $(s=-\delta)$ に代入すれば 3-膨張波が $(t,x)$ の式で表される。

## 3.7 バロトロピックのオイラー座標系の場合の例

2.5 節の最後に書いたように、オイラー座標系での保存則方程式の圧力を $\rho$ のみの関数 $P=P(\rho)$ とみて、質量保存則 (2.10) と運動量保存則 (2.15) のみで閉じた系と考えることも多い。ここでは、その場合を考えてみる。この場合は通常等エントロピー流: $P=A\rho^\gamma$ $(1<\gamma<3)$ や等温流: $P=A\rho$ を想定していることが多く、

$$P'(\rho)>0, \quad P''(\rho)\geq 0$$

を仮定する場合が多い。

まず、方程式を $U = {}^T(\rho, u)$ の方程式に書き直すと、3.5 節の計算により、$u$ に関する方程式がこの場合は

$$u_t + uu_x + \frac{P_x}{\rho} = u_t + uu_x + \frac{P'(\rho)}{\rho}\rho_x = 0$$

となるので、$U$ に関して

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} u & \rho \\ \dfrac{P'}{\rho} & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix}_x = 0$$

と書ける。

$$\begin{vmatrix} \lambda - u & -\rho \\ -\dfrac{P'}{\rho} & \lambda - u \end{vmatrix} = (\lambda - u) - P'(\rho)$$

より、$P'(\rho) > 0$ の仮定の元で、固有値は

$$\lambda_1 = u - \sqrt{P'(\rho)}, \quad \lambda_2 = u + \sqrt{P'(\rho)}$$

で、固有ベクトルは $r = c_2\,{}^T(\rho, \lambda - u)$ より、

$$r_1 = \begin{bmatrix} -\rho \\ \sqrt{P'} \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} \rho \\ \sqrt{P'} \end{bmatrix}$$

となり、

$$\nabla_U \lambda_1 = \left( \frac{P''}{2\sqrt{P'}}, 1 \right), \quad \nabla_U \lambda_2 = \left( \frac{P''}{2\sqrt{P'}}, 1 \right)$$

で、

$$\nabla_U \lambda_1 \cdot r_1 = -\frac{\rho P''}{2\sqrt{P'}} - \sqrt{P'} = -\frac{\rho P'' + 2P'}{2\sqrt{P'}}, \quad \nabla_U \lambda_2 \cdot r_2 = \frac{\rho P'' + 2P'}{2\sqrt{P'}}$$

となるので、$\rho P'' + 2P' > 0$ ならば 1-特性方向も 2-特性方向も真性非線形となる。$P = A\rho^\gamma$ $(\gamma \geq 1)$ の場合であれば、

$$\rho P'' + 2P' = A\gamma(\gamma+1)\rho^{\gamma-1}$$

なので確かに正となる。

リーマン不変量は、

$$\nabla w \cdot r_1 = -\rho w_\rho + \sqrt{P'} w_u = -\sqrt{P'}\left(\frac{\rho}{\sqrt{P'}} w_\rho - w_u\right) = 0$$

より、

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\rho}{\sqrt{P'}}, \quad \frac{du}{ds} = -1, \quad (\rho(0), u(0)) = (\rho_0, u_0)$$

を解いて、

$$u = u_0 - s, \quad \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi = s$$

となるので、

$$u + \int_a^\rho \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi = u_0 + \int_a^{\rho_0} \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi$$

となるので、この左辺が 1-リーマン不変量となる。同様に、2-リーマン不変量は、

$$u - \int_a^\rho \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi$$

となる。

$(\lambda_1(U(s)))' < 0$ なのでパラメータ $s < 0$ となり、よって 1-膨張波曲線 $R_1(U_0)$ は、

$$u = u_0 - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi \quad (\rho \leq \rho_0,\ u \geq u_0) \tag{3.26}$$

2-膨張波曲線 $R_2(U_0)$ は $(\lambda_2(U(s)))' > 0$ より $s > 0$ なので

$$u = u_0 + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi \quad (\rho \geq \rho_0,\ u \geq u_0) \tag{3.27}$$

となる。

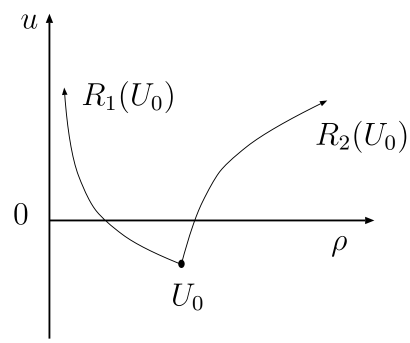



図 3.5: $(\rho, u)$ 平面での膨張波曲線 $R_1(U_0)$, $R_2(U_0)$

$P = A\rho^\gamma$ $(\gamma \geq 1)$ の場合で言えば、

$$\int \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} d\rho = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{A\gamma}}{\theta} \rho^\theta & (\gamma > 1 \text{ のとき}) \\ \sqrt{A} \log \rho & (\gamma = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なので、$\gamma > 1$ と $\gamma = 1$ とで $\rho \to +0$ のときの挙動が異なり、$R_1(U_0)$ は、$\rho \to +0$ のときに

$$u \to \begin{cases} u_0 + \dfrac{\sqrt{A\gamma}}{\theta} \rho_0^\theta & (\gamma > 1 \text{ のとき}) \\ +\infty & (\gamma = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。つまり、$\gamma > 1$ のときは $R_1(U_0)$ は $\rho \to +0$ のときに有限の $u$ のところで $u$ 軸に当たって止まるが、$\gamma = 1$ のときには $R_1(U_0)$ は $u$ 軸を漸近線として無限に伸びる。

なおこの違いは、リーマン問題が真空状態 $(\rho = 0)$ を解として含むかどうかに関係する。

また、$R_1(U_0)$ の場合は (3.26) により、

$$\frac{dU}{d\rho} = \frac{d}{d\rho} \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{P'}/\rho \end{bmatrix} = -\frac{1}{\rho} r_1(U)$$

であるから、$\rho = \rho_0 e^{-\delta}$ とすれば $\delta \geq 0$ で、

$$\frac{dU}{d\delta} = \frac{dU}{d\rho}\frac{d\rho}{d\delta} = -\frac{1}{\rho} r_1(U)\rho_0(-e^{-\delta}) = r_1(U)$$

となり、$R_2(U_0)$ の場合は (3.27) により、

$$\frac{dU}{d\rho} = \frac{d}{d\rho}\begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{P'}/\rho \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} r_2(U)$$

であるから、$\rho = \rho_0 e^{\delta}$ とすれば $\delta \geq 0$ で、

$$\frac{dU}{d\delta} = \frac{dU}{d\rho}\frac{d\rho}{d\delta} = \frac{1}{\rho} r_2(U)\rho_0 e^{\delta} = r_2(U)$$

となる。

$\lambda_1(U) = x/t$ に (3.26) を代入すると、

$$\lambda_1(U) = u - \sqrt{P'(\rho)} = u_0 - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi - \sqrt{P'(\rho)}\frac{x}{t} \tag{3.28}$$

となるので、これを $\rho$ について解けば、そしてそれを (3.26) に代入すれば $U$ を $(t, x)$ の式で表される。

例えば $P = A\rho^{\gamma}$ $(1 < \gamma < 3)$ の場合、(3.28) は

$$u_0 - \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho^{\theta} + \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho_0^{\theta} - \sqrt{A\gamma}\rho^{\theta} = \frac{x}{t}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
\sqrt{A\gamma}\rho^{\theta} &= \frac{\theta}{1+\theta}\left(u_0 + \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho_0^{\theta} - \frac{x}{t}\right), \\
u &= u_0 - \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho^{\theta} + \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho_0^{\theta} \\
&= u_0 + \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho_0^{\theta} - \frac{1}{1+\theta}\left(u_0 + \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho_0^{\theta} - \frac{x}{t}\right) \\
&= \left(u_0 + \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho_0^{\theta}\right) + \frac{1}{1+\theta}\frac{x}{t}
\end{aligned}$$

のようになる。また、$P = A\rho$ のときは (3.28) は

$$u_0 - \sqrt{A}\log\rho + \sqrt{A}\log\rho_0 - \sqrt{A} = \frac{x}{t}$$

より、この場合は

$$\begin{aligned}\sqrt{A}\log\rho &= u_0 + \sqrt{A}\log\rho_0 - \sqrt{A} - \frac{x}{t}\\ u &= u_0 + \sqrt{A}\log\rho_0 - \sqrt{A}\log\rho = \sqrt{A} + \frac{x}{t}\end{aligned}$$

となる。

同様に、$R_2(U_0)$ は、

$$\lambda_2 = u + \sqrt{P'} = u_0 + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi + \sqrt{P'} = \frac{x}{t}$$

となるから、$P = A\rho^\gamma$ $(1 < \gamma < 3)$ の場合は、

$$\begin{aligned}\sqrt{A\gamma}\rho^\theta &= \frac{\theta}{1+\theta}\left(-u_0 + \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho_0^\theta + \frac{x}{t}\right),\\ u &= \left(u_0 - \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho_0^\theta\right) + \frac{1}{1+\theta}\frac{x}{t}\end{aligned}$$

$P = A\rho$ の場合は、

$$\begin{aligned}\sqrt{A}\log\rho &= -u_0 + \sqrt{A}\log\rho_0 - \sqrt{A} + \frac{x}{t}\\ u &= -\sqrt{A} + \frac{x}{t}\end{aligned}$$

となる。

## 3.8 バロトロピックのラグランジュ座標系の場合の例

3.7 節と同様に、ラグランジュ座標系の方程式系 (2.19) の圧力を $P = P(v)$ と見て、最初の 2 本のみ (いわゆる $P$-system) を同様に考察する。この場合も通常は $P = Av^{-\gamma}$ $(1 \le \gamma < 3)$ を想定していて、

$$P'(v) < 0, \quad P''(v) > 0$$

を仮定することが多い。

方程式を $U = {}^T(v, u)$ で書けば

$$\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ P' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix}_x = 0$$

で、$P' < 0$ であれば固有値は

$$\lambda_1 = -\sqrt{-P'(v)}, \quad \lambda_2 = \sqrt{-P'(v)}$$

であり、固有ベクトルは

$$r_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{-P'(v)} \end{bmatrix}, \quad r_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ \sqrt{-P'(v)} \end{bmatrix}$$

で、

$$\nabla_U \lambda_1 r_1 = \nabla_U \lambda_2 r_2 = \frac{P''}{2\sqrt{-P'}}$$

より、$P'' > 0$ であれば 1-特性方向、2-特性方向は真性非線形となる。

リーマン不変量は、

$$\nabla_U w \cdot r_1(U) = w_v + \sqrt{-P'(v)} w_u = \sqrt{-P'(v)} \left( \frac{1}{\sqrt{-P'}} w_v + w_u \right) = 0$$

より、

$$\frac{dv}{ds} = \frac{1}{\sqrt{-P'}}, \quad \frac{du}{ds} = 1$$

から、

$$\int_{v_0}^{v} \sqrt{-P'(\xi)} d\xi = s, \quad u - u_0 = s$$

となるので、

$$u - \int_a^v \sqrt{-P'(\xi)}d\xi$$

が 1-リーマン不変量となる。$P = Av^{-\gamma}$ $(\gamma \geq 1)$ の場合は、

$$\begin{cases} u + \dfrac{\sqrt{A\gamma}}{\theta} v^{-\theta} & (\gamma > 1 \text{ の場合}) \\ u - \sqrt{A}\log v & (\gamma = 1 \text{ の場合}) \end{cases}$$

となる。ここから、3 本の連立方程式の場合と同様、オイラー座標系の場合のリーマン不変量に対応していることがわかる。

2-リーマン不変量も同様に

$$u + \int_a^v \sqrt{-P'(\xi)}d\xi$$

と得られる。

1-膨張波曲線 $R_1(U_0)$ は、

$$u = u_0 + \int_{v_0}^v \sqrt{-P'(\xi)}d\xi \quad (v \geq v_0,\ u \geq u_0) \tag{3.29}$$

2-膨張波曲線 $R_2(U_0)$ は、

$$u = u_0 - \int_{v_0}^v \sqrt{-P'(\xi)}d\xi \quad (v \leq v_0,\ u \geq u_0) \tag{3.30}$$

となる。$P = Av^{-\gamma}$ $(\gamma \geq 1)$ の場合、$v \to +0$ のときは $R_2(U_0)$ は $\gamma = 1$ でも $\gamma > 1$ でも $u \to \infty$ となるが、$v \to \infty$ のときの $R_1(U_0)$ は、$\gamma = 1$ と $\gamma > 1$ では様子が異なり、

$$u \to \begin{cases} u_0 + \dfrac{\sqrt{A\gamma}}{\theta} v_0^{-\theta} & (\gamma > 1 \text{ のとき}) \\ +\infty & (\gamma = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。

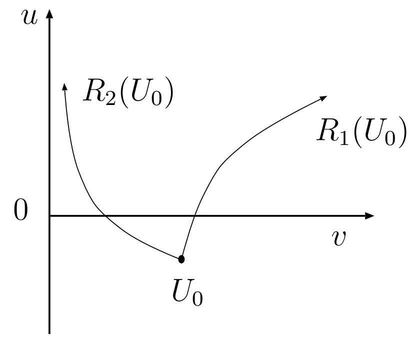



図 3.6: $(v,u)$ 平面での膨張波曲線 $R_1(U_0)$, $R_2(U_0)$

また、$R_1(U_0)$ の場合は (3.29) より、

$$\frac{dU}{dv} = \frac{d}{dv}\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{-P'} \end{bmatrix} = r_1(U)$$

$R_2(U_0)$ の場合は (3.30) より、

$$\frac{dU}{dv} = \frac{d}{dv}\begin{bmatrix} v \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{-P'} \end{bmatrix} = -r_2(U)$$

なので、$v = v_0 + \delta$, $v = v_0 - \delta$ とすれば $\delta \geq 0$ で、

$$\frac{dU}{d\delta} = r_j(U)$$

が成り立つ。

$R_1(U_0)$ を $(t,x)$ で表わすには、

$$\lambda_1(U) = -\sqrt{-P'(v)} = \frac{x}{t}$$

を $v$ で解けば $(t,x)$ で表わされ、それを (3.29) に代入すれば $u$ も $(t,x)$ で表される。同様に $R_2(U_0)$ も、

$$\lambda_2(U) = \sqrt{-P'(v)} = \frac{x}{t}$$

を $v$ で解いて、それを (3.30) に代入すれば $v, u$ が $(t, x)$ で表される。

例えば、$P = Av^{-\gamma}$ $(1 < \gamma < 3)$ の場合、$R_1(U_0)$ は

$$\sqrt{A\gamma}v^{-1-\theta} = -\frac{x}{t}$$

より

$$v = \left(-\frac{1}{\sqrt{A\gamma}}\frac{x}{t}\right)^{-1/(1+\theta)} \qquad (x < 0)$$

であり、$u$ は

$$u = u_0 - \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}(v^{-\theta} - v_0^{-\theta})$$

にそれを代入して得られる。

# 4 不連続解

## 4.1 はじめに

保存則方程式の代表的な例である理想気体の方程式では、衝撃波という不連続な物理現象が存在するが、この節ではそのような不連続な解について考察する。

もちろん、不連続な関数は微分できないので、その不連続なところでは微分方程式

$$U_t + F(U)_x = 0 \tag{4.1}$$

は満たされない。もし、不連続な箇所が、$(t, x)$ 平面上のある曲線上であれば、そこは全体では測度 0 の集合だから、といってそれを無視し、その曲線以外では (4.1) を満足する関数を解とすればいい、というわけではない。それでは適切な衝撃波を再現できないし、解の一意性も保証できない。

では、その (4.1) に「意味のある」不連続性とはどのようなものであるかを、いくつかの角度から検討してみる。

## 4.2 物理的な要請

まずは、その不連続解の物理的な適切性を考察してみる。ここでは、2 節で導いた、オイラー座標系での理想気体の保存則方程式系 (2.10), (2.15), (2.16) を例に取って考察する。

このオイラー座標系での理想気体の方程式系を (4.1) の形に書いた場合、この $F(U)$ は特に

$$F(U) = uU + G(U), \quad G(U) = \begin{bmatrix} 0 \\ P \\ Pu \end{bmatrix}$$

の形をしている。$uU$ は、境界を超えて保存量 $U$ の流入や流出による項で、$G(U)$ は、境界に働く力によって時間とともに増減される保存量で、$G$ の第 2 成分の $P$ は力積、第 3 成分の $Pu$ は仕事を表していた。

今、解の不連続性がなめらか ($C^1$) な曲線 $x = d(t)$ に沿って現れる ($x$ 軸には平行には現れない) とし、その不連続線以外では $U = U(t, x)$ はなめらか ($C^1$) な関数で方程式 (4.1) を満たすとする。そして、その不連続性は第一種の不連続、すなわちこの不連続線へ向かっての $U$ の有限な極限が存在するとする。なお、通常 $x < d(t)$ 側の解を $U_l$, $x > d(t)$ 側の解を $U_r$ のように書くことが多く、ここでも適宜そのような記法を用いる。

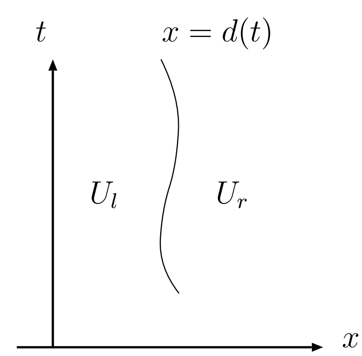



図 4.1: 不連続線と左右の解

物理的な要請とは、もちろん、

「保存量は、その不連続線の前後でも保存されること」

である。

簡単のために、$(t_0, x_0) = (t_0, d(t_0))$ の近くを拡大して考えることで、$x = d(t)$ を直線 $x = x_0 + s_0(t - t_0)$ $(s_0 = d'(t_0))$ と見なし、$U(t, x)$ も $x = d(t)$ の左右で定数ベクトル $U_l$ $(= U(t_0, d(t_0) - 0))$, $U_r$ $(= U(t_0, d(t_0) + 0))$ であると考える。そして、$\Delta t > 0$ を十分小さい定数として、$t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$ の時間変化での保存量の変化を考える。

$x_1$, $x_2$ を、それぞれ $x_0$ の左右の点とし、$t = t_0$ でそれぞれの位置にあった気体の $\Delta t$ 秒後の位置をそれぞれ $x'_1$, $x'_2$ とし、$x'_0 = d(t_0 + \Delta t)$ とすると、

$$\begin{cases} x'_0 = x_0 + s_0 \Delta t, \\ x'_1 = X(t_0 + \Delta t; t_0, x_1) = x_1 + u_l \Delta t, \\ x'_2 = X(t_0 + \Delta t; t_0, x_2) = x_2 + u_r \Delta t \end{cases} \tag{4.2}$$

となる ($x'_1$, $x'_0$, $x'_2$ の順序は変わらないように $\Delta t$ を十分小さくとる)。

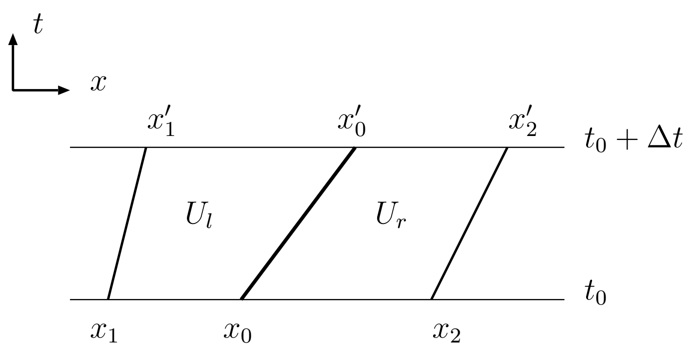



図 4.2: $x_j$, $U_l$, $U_r$

このとき、$t = t_0$ のときの $x_1 \leq x \leq x_2$ における保存量 $M$ と $t = t_0 + \Delta t$ のときの $x'_1 \leq x \leq x'_2$ における保存量 $M'$ の値を比べると、$x_1$ から $x'_1$ への直線 $x = x_1 + u_l(t - t_0)$ と $x_2$ から $x'_2$ への直線 $x = x_2 + u_r(t - t_0)$ は流体とともに移動しているから、これらの線を超えて流体の出入りはなく、よって保存量の出入り $(uU)$ もない。よって、時間とともに境界に働く力によって増減される量 $(G(U))$ による変化があるだけなので、

$$M' = M + \Delta t G(U_l) - \Delta t G(U_r) \tag{4.3}$$

が成り立つ。$M$, $M'$ は、

$$M = (x_2 - x_0)U_r + (x_0 - x_1)U_l, \quad M' = (x'_2 - x'_0)U_r + (x'_0 - x'_1)U_l$$

であるから、これを (4.3) に代入すると、

$$(x'_2 - x'_0)U_r + (x'_0 - x'_1)U_l = (x_2 - x_0)U_r + (x_0 - x_1)U_l + \Delta t G(U_l) - \Delta t G(U_r)$$

となる。これに (4.2) を代入して整理すると

$$(u_r\Delta t - s_0\Delta t)U_r + (s_0\Delta t - u_l\Delta t)U_l = \Delta t(G(U_l) - G(U_r))$$

となるので $\Delta t$ で割れば、

$$s_0(U_r - U_l) = u_rU_r + G(U_r) - \{u_lU_l + G(U_l)\}$$

すなわち、

$$s_0[U] = [F(U)] \tag{4.4}$$

が得られることになる。ここで、$[\cdot]$ は、

$$[g(U)] = \Big[g\Big]_{U=U_l}^{U=U_r} = g(U_r) - g(U_l)$$

を表す記号で、この不連続線にともなっての左から右への段差を意味している。

この (4.4) は不連続性の前後での $U$ の値と、不連続線の伝播速度 $s_0$ が満たすべき関係式で、**ランキン-ユゴニオ関係式** (Rankine-Hugoniot relation) または、**ランキン-ユゴニオ条件** と呼ばれる。

上の議論は、$(t_0, x_0)$ の付近で拡大して定数と見る、ということをしなくても同じことを行うことは可能である。$t_0 \le t \le t_1$ で不連続線の $x = d(t)$ の左側に曲線 $x = X(t; t_0, a)$ があるように $x = a$ を取り、右側に曲線 $x = X(t; t_0, b)$ があるように $x = b$ を取る。そして、$D_1$ をこの不連続線の左側の領域、$D_2$ を右側の領域とする:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(t,x);\ X(t;t_0,a) < x < d(t),\ t_0 < t < t_1\}, \\ D_2 &= \{(t,x);\ d(t) < x < X(t;t_0,b),\ t_0 < t < t_1\} \end{aligned}$$

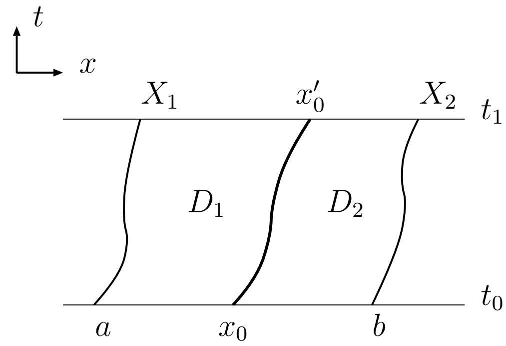



図 4.3: $X_j$, $D_1$, $D_2$

このとき上の考察と同様に、曲線 $x = X(t;t_0,a)$, $x = X(t;t_0,b)$ を超えて保存量の流入、流出はなく、その上での $G$ による影響があるだけなので、

$$\begin{cases} M' = M + \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} G(t, X(t;t_0,a))dt - \int_{t_0}^{t_1} G(t, X(t;t_0,b))dt, \\ M = \displaystyle\int_a^b U(t_0,x)dx, \quad M' = \int_{X_1}^{X_2} U(t_1,x)dx \\ (X_1 = X(t_1;t_0,a), \quad X_2 = X(t_1;t_0,b)) \end{cases} \tag{4.5}$$

がいえる。

$D_1$ の内部では $U_t + F(U)_x = 0$ を満たし、かつ $U$ の $x = d(t)$ への極限は存在するのでそれを $U(t, d(t) - 0)$ と書けば、Green の公式:

$$\iint_D (f_t + g_x)dxdt = \oint_{\partial D} (-f dx + g dt) \tag{4.6}$$

より、

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{D_1} (U_t + F(U)_x)dxdt = \oint_{\partial D_1} (-U dx + F(U)dt) \\ &= \int_a^{x_0} (-U(t_0,x))dx + \int_{t_0}^{t_1} \left[-U(t,x)\frac{dx}{dt} + F(U(t,x))\right]_{x=d(t)-0} dt \\ &\quad - \int_{X_1}^{x'_0} (-U(t_1,x))dx - \int_{t_0}^{t_1} \left[-U(t,x)\frac{dx}{dt} + F(U(t,x))\right]_{x=X(t;t_0,a)} dt \\ &\quad (x'_0 = d(t_1)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_a^{x_0} U(t_0,x)dx + \int_{X_1}^{x_0'} U(t_1,x)dx \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} \left[F(U(t,x)) - d'(t)U(t,x)\right]_{x=d(t)-0} dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1} \left[F(U(t,x)) - u(t,x)U(t,x)\right]_{x=X(t;t_0,a)} dt \quad ((2.5)\text{ より}) \\
&= -\int_a^{x_0} U(t_0,x)dx + \int_{X_1}^{x_0'} U(t_1,x)dx - \int_{t_0}^{t_1} G(U(t,X(t;t_0,a)))dt \\
&\quad + \int_{t_0}^{t_1} \left[F(U(t,x)) - d'(t)U(t,x)\right]_{x=d(t)-0} dt \qquad (4.7)
\end{aligned}
$$

同様に、$D_2$ での積分を考えれば、

$$
\begin{aligned}
0 &= \iint_{D_2} (U_t + F(U)_x)dxdt = \oint_{\partial D_2} (-Udx + F(U)dt) \\
&= -\int_{x_0}^{b} U(t_0,x)dx + \int_{x_0'}^{X_2} U(t_1,x)dx + \int_{t_0}^{t_1} G(U(t,X(t;t_0,b)))dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1} \left[F(U(t,x)) - d'(t)U(t,x)\right]_{x=d(t)+0} dt \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

となるので、(4.7), (4.8) を加えると、

$$
\begin{aligned}
0 &= -\int_a^{b} U(t_0,x)dx + \int_{X_1}^{X_2} U(t_1,x)dx + \int_{t_0}^{t_1} \Big[G(U(t,x))\Big]_{x=X(t;t_0,a)}^{x=X(t;t_0,b)} dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1} \Big[F(U(t,x)) - d'(t)U(t,x)\Big]_{x=d(t)-0}^{x=d(t)+0} dt
\end{aligned}
$$

が得られる。

(4.5) により、この式の右辺の最初の 3 項の和は 0 であるから、$x = d(t)$ の両端の値での積分のみが残り、

$$
\int_{t_0}^{t_1} \Big[F(U(t,x)) - d'(t)U(t,x)\Big]_{x=d(t)-0}^{x=d(t)+0} dt = 0
$$

が成り立つこととなる。$t_0$, $t_1$ は任意であるから、よって $x = d(t)$ 上で

$$
[F(U)] = d'(t)[U] \qquad (4.9)
$$

が成り立つことがわかる。これで (4.9) と同等のランキン-ユゴニオ条件が得られることになる。

## 4.3 特異性の伝播

この不連続線を、偏微分方程式の「特異性の伝播」という観点から考えてみる。この節は、[7] の第 5 章 §1.3、「不連続線としての特性曲線. 波面」の節での議論を参考に考察を行う。

まずは、方程式 (4.1) の導関数の不連続性について考える。$U(t,x)$ が $(t,x)$ について連続で、($C^1$) 曲線 $x=x(t)$ 以外ではなめらか ($C^1$) で、$x=x(t)$ では $U_t$, $U_x$ が不連続であるが、$x=x(t)$ への有限な極限値は存在する (第一種不連続) であるとする。つまり、

$$U(t,x(t)+0)-U(t,x(t)-0)=0 \tag{4.10}$$
$$U_x(t,x(t)+0)-U_x(t,x(t)-0)=H(t) \tag{4.11}$$

であるとする。

まず、(4.10) を $t$ で微分すると、

$$U_t(t,x(t)+0)+x'(t)U_x(t,x(t)+0)-\{U_t(t,x(t)-0)+x'(t)U_x(t,x(t)-0)\}=0$$

となるので、

$$[U_t]=\Big[U_t\Big]_{x=x(t)-0}^{x=x(t)+0}=-x'(t)[U_x]=-x'(t)H(t)$$

となるが、方程式 (4.1) より、

$$\begin{aligned}[U_t] &= [-F(U)_x]=-[\nabla_U F(U)U_x] \\ &= -\nabla_U F(U(t,x(t)))\{U_x(t,x(t)+0)-U_x(t,x(t)-0)\} \\ &= -\nabla_U F(U)H(t)\end{aligned}$$

となるので、$\nabla_U F(U)H(t) = x'(t)H(t)$ がいえる。よって、$H(t) \neq 0$ であれば、ある $j$ に対し、

$$\begin{cases} x'(t) = \lambda_j(U(t,x(t))), \\ H(t) = c(t)r_j(U(t,x(t))) \end{cases} \tag{4.12}$$

が成り立つ。よって、(4.12) の第 1 式より、このような $x = x(t)$ は $j$-特性曲線であることがわかる。

例えば、膨張波解 (3.8) の端の特性曲線 $x = \lambda_j(U_0)t$, $x = \lambda_j(U_1)t$ が、この導関数の不連続線に相当する。

なお、[7] では、方程式を座標変換して考察しているが、それはこの場合で言えば、この不連続線の近くで、

$$\begin{cases} \eta = x - x(t), \\ \xi = t \end{cases}$$

のような座標変換を行うことに相当し、この $(\eta, \xi)$ は、

$$\begin{vmatrix} \eta_t & \eta_x \\ \xi_t & \xi_x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x'(t) & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

であるから確かに $(t,x)$ の代わりに $(\eta,\xi)$ に座標変換できて、$x = x(t)$ では $[U_\xi] = 0$, $[U_\eta] = H$ となることになる。これは、

$$\begin{cases} U_t = U_\eta(-x'(t)) + U_\xi, \\ U_x = U_\eta \end{cases}$$

から、

$$\begin{cases} U_\eta = U_x, \\ U_\xi = U_t + x'(t)U_x \end{cases}$$

となるから、直接 (4.10), (4.11) から

$$\begin{aligned} [U_\xi] &= \frac{d}{dt}U(t,x(t)+0) - \frac{d}{dt}U(t,x(t)-0) = 0, \\ [U_\eta] &= [U_x] = H(t) \end{aligned}$$

のように得ることもできる。

よって、(4.1) を $(\eta,\xi)$ で表せば、

$$0=U_t+F_x=-x'(t)U_\eta+U_\xi+F_\eta=-x'(t)U_\eta+U_\xi+\nabla_U F(U)U_\eta$$

とすることで、この式の $x=x(t)$ での段差を考えれば、

$$-x'(t)[U_\eta]+[U_\xi]+\nabla_U F(U)[U_\eta]=(\nabla_U F(U)-x'(t))H(t)=0$$

となるので、(4.12) を得ることができる。

次は、$U$ 自身の不連続性について考える。そのために、2 節で微分方程式を導くために使われた $\bar{M}^1$, $\bar{N}^1$ を考える。

2.4 節では、この $\bar{M}^1$, $\bar{N}^1$ に対する保存則 (2.9) を、それらが微分可能であるとして $t$, $x$ で微分することで質量保存則方程式 (2.10) を導いたわけであるが、今はその微分可能性を保証できない場合を考えるわけであるから、むしろその前の、$\bar{M}^1$, $\bar{N}^1$ に対する保存則 (2.9) から始めるべきである。

つまり一般には、(4.1) を考える代わりに、その前の形の保存則として、

$$\bar{U}(t,x)=\int_{x_0}^{x}U(t,y)dy,\quad \bar{F}(t,x)=\int_{t_0}^{t}F(U(s,x))ds,$$

に対して、

$$\bar{U}(t,x)+\bar{F}(t,x)=\bar{U}(t_0,x)+\bar{F}(t,x_0) \tag{4.13}$$

が成り立つ、として話を始める。

なめらか ($C^1$) な曲線 $x=d(t)$ が $U$ の不連続線で、$x=x_0$ はその左にあるとする。この $x=d(t)$ 以外では $\bar{U}$, $\bar{F}$ は十分滑らかで (4.13) を満たし、$x=d(t)$ では $\bar{U}$, は連続ではあるが、その微分は不連続 (第一種不連続) であるとする:

$$\bar{U}(t,d(t)+0)=\bar{U}(t,d(t)-0) \tag{4.14}$$

なお、この (4.14) と (4.13) を組み合わせると、

$$[\bar{F}] = -[\bar{U}] + [\bar{U}(t_0, x)] + [\bar{F}(t, x_0)] = 0$$

となるので、$\bar{F}$ も連続であることが言える。

(4.14) を $t$ について微分すると、

$$[\bar{U}_t] + d'(t)[\bar{U}_x] = 0$$

が成り立ち、$x = d(t)$ 以外では $\bar{U}_x = U$ であるので、

$$[\bar{U}_t] = -d'(t)[U]$$

となる。一方、(4.13) より、

$$[\bar{U}_t] = [-\bar{F}_t(t, x) + \bar{F}_t(t, x_0)] = -[\bar{F}_t(t, x)] = -[F]$$

となるので、結局ランキン-ユゴニオ条件

$$[F] = d'(t)[U]$$

が得られることになる。

## 4.4 ラグランジュ座標系での不連続性

ここまでの、4.2, 4.3 節での考察は オイラー座標系での話であったので、ラグランジュ座標系 (質量座標系) の方程式にそのまま同じような形で成り立つかどうかは定かではない。しかも、2.6 節での ラグランジュ座標系の方程式の導出は、解がなめらかであるとして式変形を行っているので、不連続な解に対してはそこでの計算は意味を持たず、不連続な解に関する両座標系での対応は不明である。よって、ここでは 4.2 節で得られたランキン-ユゴニオ条件が、ラグランジュ座標系ではどのようになるのかを考えてみることにする。

まず、ここでは簡単のため

$$B = \frac{u^2}{2} + e$$

のように書くこととし、オイラー座標系での方程式を

$$U_t + F(U)_x = 0, \quad U = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho B \end{bmatrix}, \quad F(U) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho u B + P u \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

ラグランジュ座標系での方程式を

$$\tilde{V}_\tau + \tilde{G}(\tilde{V})_z = 0, \quad \tilde{V} = \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{u} \\ \tilde{B} \end{bmatrix}, \quad \tilde{G}(\tilde{V}) = \begin{bmatrix} -\tilde{u} \\ \tilde{P} \\ \tilde{Pu} \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

のように書くこととする。

$x = x_0$ は、不連続線 $x = d(t)$ より左にあるとし、$x = x_0$ から右にみて最初にあらわれる不連続線が $x = d(t)$ であるとする。この $x = d(t)$ を質量座標で表した曲線を $z = \tilde{d}(\tau)$ とすると、

$$\tilde{d}(t) = \int_{X_0}^{d(t)} \rho(t, y) dy, \quad X_0 = X(t; t_0, x_0) \tag{4.17}$$

が $t$ に対して成り立つことになる。この積分の中に現れる $\rho$ は、$y < d(t)$ なのでなめらかな関数であり、方程式 (4.15) を満たすことに注意する。この式 (4.17) を $t$ で微分すると、

$$\begin{aligned} \tilde{d}'(t) &= \rho(t, d(t) - 0) d'(t) - \rho(t, X_0) \frac{d}{dt} X_0 + \int_{X_0}^{d(t)} \rho_t(t, y) dy \\ &= \rho(t, d(t) - 0) d'(t) - \rho(t, X_0) u(t, X_0) - \int_{X_0}^{d(t)} (\rho u)_x(t, y) dy \quad ((2.5) \text{ より}) \\ &= \rho(t, d(t) - 0) d'(t) - (\rho u)(t, d(t) - 0) \end{aligned}$$

となるので、

$$\tilde{d}' = \rho_l (d' - u_l)$$

よって、

$$d' = \frac{\tilde{d}'}{\rho_l} + u_l = \tilde{v}_l \tilde{d}' + \tilde{u}_l \tag{4.18}$$

となることがわかる。なお、ここでは簡単のため、

$$U_r = U(t, d(t) + 0), \quad U_l = U(d(t) - 0)$$

のように書くことにする。この関係式 (4.18) を用いて、オイラー座標系に対するランキン-ユゴニオ条件

$$\begin{cases} d'[\rho] = [\rho u] \\ d'[\rho u] = [\rho u^2 + P] \\ d'[\rho B] = [\rho u B + P u] \end{cases} \tag{4.19}$$

からラグランジュ座標系の関係式を導くことにする。

まず、

$$f_r g_r - f_l g_l = (f_r - f_l) g_r + f_l (g_r - g_l) = f_r (g_r - g_l) + (f_r - f_l) g_l$$

より、

$$[fg] = [f] g_r + f_l [g] = [f] g_l + f_r [g] \tag{4.20}$$

であることに注意する。

まず、(4.19) の第 1 式に (4.18) を代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= [\rho u] - d'[\rho] = [\tilde{\rho}\tilde{u}] - (\tilde{v}_l \tilde{d}' + \tilde{u}_l)[\tilde{\rho}] = \tilde{u}_l[\tilde{\rho}] + \tilde{\rho}_r[\tilde{u}] - \tilde{v}_l \tilde{d}'[\tilde{\rho}] - \tilde{u}_l[\tilde{\rho}] \\ &= \tilde{\rho}_r \left( [\tilde{u}] - \tilde{d}' \frac{\tilde{v}_l}{\tilde{\rho}_r} [\tilde{\rho}] \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\frac{\tilde{v}_l}{\tilde{\rho}_r}[\tilde{\rho}] = \frac{\tilde{v}_l}{\tilde{\rho}_r}(\tilde{\rho}_r - \tilde{\rho}_l) = \tilde{v}_l - \tilde{v}_r = -[\tilde{v}] \quad \left( v = \frac{1}{\rho} \right)$$

より、

$$0 = \tilde{\rho}_r([\tilde{u}] + \tilde{d}'[\tilde{v}])$$

となる。よって結局

$$[\tilde{u}] = -\tilde{d}'[\tilde{v}] \tag{4.21}$$

が得られることになる。

次に、(4.19) の第 2 式に (4.18) を代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= [\rho u^2 + P] - d'[\rho u] = [\tilde{\rho}\tilde{u}^2] + [\tilde{P}] - (\tilde{v}_l\tilde{d}' + \tilde{u}_l)[\tilde{\rho}\tilde{u}] \\ &= [\tilde{P}] + \tilde{\rho}_r\tilde{u}_r[\tilde{u}] - \tilde{d}'\tilde{v}_l[\tilde{\rho}\tilde{u}] \end{aligned}$$

となるが、(4.21) を代入すると

$$\tilde{\rho}_r\tilde{u}_r[\tilde{u}] - \tilde{d}'\tilde{v}_l[\tilde{\rho}\tilde{u}] = -\tilde{\rho}_r\tilde{u}_r\tilde{d}'[\tilde{v}] - \tilde{d}'\tilde{v}_l[\tilde{\rho}\tilde{u}] = -\tilde{d}'[\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v}] = -\tilde{d}[\tilde{u}]$$

となるので、結局

$$[\tilde{P}] = \tilde{d}'[\tilde{u}] \tag{4.22}$$

が得られる。

同様に、(4.19) の第 3 式は、(4.21) を用いれば、

$$\begin{aligned} 0 &= [\rho u B + P u] - d'[\rho B] = [\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{B}] + [\tilde{P}\tilde{u}] - (\tilde{v}_l\tilde{d}' + \tilde{u}_l)[\tilde{\rho}\tilde{B}] \\ &= [\tilde{P}\tilde{u}] + [\tilde{u}]\tilde{\rho}_r\tilde{B}_r - \tilde{d}'\tilde{v}_l[\tilde{\rho}\tilde{B}] = [\tilde{P}\tilde{u}] - \tilde{d}'([\tilde{v}]\tilde{\rho}_r\tilde{B}_r + \tilde{v}_l[\tilde{\rho}\tilde{B}]) \\ &= [\tilde{P}\tilde{u}] - \tilde{d}'[\tilde{v}\tilde{\rho}\tilde{B}] = [\tilde{P}\tilde{u}] - \tilde{d}'[\tilde{B}] \end{aligned}$$

より、

$$[\tilde{P}\tilde{u}] = \tilde{d}'[\tilde{B}] \tag{4.23}$$

が得られる。

結局、(4.21), (4.22), (4.23) により、ラグランジュ座標系でもオイラー座標系の場合と同形のランキン-ユゴニオ条件

$$[\tilde{G}(\tilde{V})] = \tilde{d}'[\tilde{V}]$$

が成り立つことになる。

一般に、保存則方程式 (4.1) が別の形の発散形

$$W_t + H(W)_x = 0$$

に書き直すことができるとき、それで不連続線に関する条件を

$$d'[W] = [H(W)]$$

としていいかというとそうではない。例えば、単独保存則

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \tag{4.24}$$

に対するランキン-ユゴニオ条件は、

$$d'[u] = \left[\frac{u^2}{2}\right] = \frac{u_r^2 - u_l^2}{2} = \frac{u_l + u_r}{2}[u]$$

すなわち、

$$d' = \frac{u_l + u_r}{2}$$

となるが、この (4.24) は、$u$ がなめらかならば、

$$\left(\frac{u^2}{2}\right)_t + \left(\frac{u^3}{3}\right)_x = 0$$

と書くこともでき、これに対するランキン-ユゴニオ条件を考えると

$$d'\left[\frac{u^2}{2}\right]=\left[\frac{u^3}{3}\right]=\frac{1}{3}[u](u_l^2+u_lu_r+u_r^2)$$

すなわち、

$$d'=\frac{2}{3}\,\frac{u_l^2+u_lu_r+u_r^2}{u_l+u_r}$$

となり、ランキン-ユゴニオ条件の意味するものが変わってしまう。

つまり、保存則方程式のランキン-ユゴニオ条件を考える場合は、解がなめらかであると見て方程式を変形して、別の保存系に書き直してはいけない、ということになる。

その意味では、2.6 節のラグランジュ座標系の方程式の導出では、解がなめらかであるとして無理矢理保存系の形に書き直したようにも見えるが実はそうではなく、この節の結果により、その形 (4.16) がオイラー座標系の保存則方程式 (4.15) にちゃんと対応した形のものであることを意味している。

## 4.5 ランキン-ユゴニオ条件を満たすベクトルの構造

4.2, 4.3 節で見たように、不連続線と左右の解の値はランキン-ユゴニオ条件を満たす必要があることがわかる。よって、(4.1) の一番単純な不連続解は、ランキン-ユゴニオ条件

$$s(U_r-U_l)=F(U_r)-F(U_l) \tag{4.25}$$

を満たす定数ベクトル $U_l$, $U_r$, と定数値 $s$ に対して、

$$U(t,x)=\begin{cases}U_l & (x<st\ \text{のとき}),\\ U_r & (x>st\ \text{のとき})\end{cases}$$

であることになる。なお、この解は $U_0=U_l$, $U_1=U_r$ のときの初期条件 (3.9) を満たす解になっていて、よってそのような初期値に対するリーマン問題の解になっている。

条件式 (4.25) は、一般には $N$ 本の式であり、よって $U_l$ を任意に $\Omega$ 内のベクトルと固定し、(4.25) から $(N+1)$ 個の未知数である $U_r$, $s$ を求めると考えると、それらは一つのパラメータで表現されるものとなり、$U_r$ は相空間 $\Omega$ 上の曲線 (曲線群) となるはずである。この節では、それがどのようなものであるかを考えてみることにする。ただし、一般の $F$ に対しては、大域的な構造を知ることは無理なので、ここでは $U_l$ の近くに限定した局所的な構造を調べることになるが、後で具体例で大域的な構造についても考える。

以後 $U_r$ を、単に $U$ と書くことにする。(4.25) の右辺を

$$F(U)-F(U_l)=\Big[F(U_l+\tau(U-U_l)\Big]_{\tau=0}^{\tau=1}=\int_0^1\nabla_U F(U_l+\tau(U-U_l))d\tau(U-U_l)$$

と変形し、この行列を

$$G(U)=G(U;U_l)=\int_0^1\nabla_U F(U_l+\tau(U-U_l))d\tau$$

とすると、(4.25) は

$$G(U)[U]=s[U] \tag{4.26}$$

と書ける。不連続線では $[U]\neq 0$ なので、これは

$s$ は $G(U)$ の固有値で、$[U]$ はそれに対する固有ベクトル

であることを意味する。

$$\lim_{U\to U_l}G(U)=\nabla_U F(U_l)$$

であるので、$U$ が $U_l$ の十分近くにあれば、$G(U)$ の固有方程式は $\nabla_U F(U_l)$ の固有方程式と近いものになり、よって、両者の固有値、固有ベクトルも近いものとなる (固有ベクトルの方は正確に言えば、近いものが取れる) ので、$U$ が $U_l$ に十分近ければ、$G(U)$ の固有値はすべて異なる実数で、その固有値 $\mu_j(U)$, およびそれに対する固有ベクトル $R_j(U)$ は、

$$\mu_1(U)<\cdots<\mu_N(U),\quad \lim_{U\to U_l}\mu_j(U)=\mu(U_l)=\lambda_j(U_l),$$
$$\lim_{U\to U_l}R_j(U)=R_j(U_l)=r_j(U_l)$$

を満たす (ものが取れる)。このとき (4.26) は、ある $k$ に対して、

$$s = \mu_k(U), \quad [U] \mathbin{//} R_k(U) \tag{4.27}$$

を意味する。この後者の方程式

$$U - U_l = \delta R_k(U) \tag{4.28}$$

によって相空間上の曲線 $U = U(\delta) = U_k(\delta)$ が得られ、それによって $s$ が $s = \mu_k(U(\delta))$ と同じパラメータで表現されることになる。

詳しく述べれば、

$$\nabla_U(U - U_l - \delta R_k(U))\Big|_{\delta=0} = E$$

なので、陰関数定理により $|\delta|$ が十分小さいところで $U = U(\delta)$ が一意に定まる。よって、(4.28) は $\delta = 0$ の近くで確かに 1 本の相空間内の曲線 $U = U_k(\delta)$ を決定し、(4.26) は、少なくとも $U_l$ の近くでは $N$ 本の曲線 $U = U_1(\delta),\ldots U_N(\delta)$ を与えることになる。

今度はもう少し細かく、その曲線 $U = U_k(\delta)$ の向きや、$s = s_k(\delta) = \mu_k(U_k(\delta))$ の変化について考えてみる。まず (4.28) より、$\delta = 0$ のとき、

$$U_k(0) = U_l, \quad s_k(0) = \mu_k(U_l) = \lambda_k(U_l) \tag{4.29}$$

となる。また、(4.28) を $\delta$ で微分すれば、

$$U_k'(\delta) = R_k(U_k(\delta)) + \delta\nabla_U R_k(U_k(\delta))U_k'(\delta)$$

となるので、$\delta = 0$ とすれば

$$U_k'(0) = R_k(U_k(0)) = R_k(U_l) = r_k(U_l) \tag{4.30}$$

が得られる。

次は $U_k''(0)$ と $s_k'(0)$ を求めるために、(4.25) に戻って $U_r = U_k(\delta)$, $s = s_k(\delta)$ を代入して $\delta$ で 2 回微分する。

$$\begin{aligned}
&s_k(\delta)(U_k(\delta) - U_l) = F(U_k(\delta)) - F(U_l) \\
&s_k'[U_k] + s_k U_k' = \nabla_U F(U_k) U_k' \\
&s_k''[U_k] + 2s_k' U_k' + s_k U_k'' = \{\nabla_U F(U_k)\}' U_k' + \nabla_U F(U_k) U_k''
\end{aligned}$$

$\delta = 0$ とすると、(4.29), (4.30) より、

$$2s_k'(0) r_k(U_l) + \lambda_k(U_l) U_k''(0) = \{\nabla_U F(U_k)\}'(0) r_k(U_l) + \nabla_U F(U_l) U_k''(0) \tag{4.31}$$

となる。一方、

$$\nabla_U F(U) r_k(U) = \lambda_k(U) r_k(U)$$

に $U = U_k(\delta)$ を代入して $\delta$ で微分すれば、

$$\begin{aligned}
&\{\nabla_U F(U_k)\}' r_k(U_k) + \nabla_U F(U_k) r_k(U_k)' = \lambda_k(U_k)' r_k(U_k) + \lambda_k(U_k) r_k(U_k)' \\
&\{\nabla_U F(U_k)\}' r_k(U_k) + \nabla_U F(U_k) \nabla_U r_k(U_k) U_k' \\
&\quad = \quad \{\nabla_U \lambda_k(U_k) U_k'\} r_k(U_k) + \lambda_k(U_k) \nabla_U r_k(U_k) U_k'
\end{aligned}$$

となるので、$\delta = 0$ とすると

$$\begin{aligned}
&\{\nabla_U F(U_k)\}'(0) r_k(U_l) + \nabla_U F(U_l) \nabla_U r_k(U_l) r_k(U_l) \\
&\quad = \quad \{\nabla_U \lambda_k(U_l) r_k(U_l)\} r_k(U_l) + \lambda_k(U_l) \nabla_U r_k(U_l) r_k(U_l)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

となる。よって、(4.31) と (4.32) の両辺を引き算して整理すると、

$$\begin{aligned}
&\{\nabla_U F(U_l) - \lambda_k(U_l)\}\{U_k''(0) - \nabla_U r_k(U_l) r_k(U_l)\} \\
&\quad = \quad \{2s_k'(0) - \nabla_U \lambda_k(U_l) r_k(U_l)\} r_k(U_l)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

が得られる。この (4.33) の両辺に、左から左固有ベクトル $l_k(U_l)$ をかけると左辺が消え、

$$\{2s_k'(0) - \nabla_U \lambda_k(U_l) r_k(U_l)\} l_k(U_l) r_k(U_l) = 0$$

のみが残る。

## 補題 4.1

$$l_j(U)r_k(U)\begin{cases}\neq 0 & (j=k \text{ のとき}),\\ \equiv 0 & (j\neq k \text{ のとき})\end{cases}$$

証明

$$l_j(U)\nabla_U F(U)r_k(U) = l_j(U)(\lambda_k(U)r_k(U)) = (\lambda_j(U)l_j(U))r_k(U)$$

より、$j \neq k$ のときは $\lambda_j \neq \lambda_k$ より $l_j r_k = 0$ となる。また、もしある $U = U_0$ で $l_k(U_0)r_k(U_0) = 0$ ならば、$l_k(U_0)$ は $r_1(U_0), \ldots r_N(U_0)$ すべてと垂直であることになるが、$r_1(U_0),\ldots r_N(U_0)$ は一次独立なので、それは $l_k(U_0) = 0$ を意味してしまうので不合理。よって $l_k(U)r_k(U)$ は、すべての $U$ に対して 0 ではない。■

よって、この補題 4.1 により

$$s_k'(0) = \frac{1}{2}(\nabla_U \lambda_k \cdot r_k)(U_l)$$

となる。また、これを (4.33) に代入すれば、

$$(\nabla_U F - \lambda_k)\{U_k''(0) - \nabla_U r_k \cdot r_k\} = 0$$

より、この中括弧の部分は固有ベクトル、よって

$$U_k''(0) = \nabla_U r_k(U_l)r_k(U_l) + \sigma_k r_k(U_l)$$

となる。

結局、$\delta = 0$ での曲線 $U = U_k(\delta)$ の方向、$s_k(\delta)$ の増減については、

$$\begin{cases} U_k(0) = U_l, \\ U_k'(0) = r_k(U_l), \\ U_k''(0) = \nabla_U r_k(U_l)r_k(U_l) + \sigma_k r_k(U_l)\end{cases} \tag{4.34}$$

$$\begin{cases} s_k(0) = \lambda_k(U_l), \\ s'_k(0) = \dfrac{1}{2}(\nabla_U \lambda_k \cdot r_k)(U_l) \end{cases} \tag{4.35}$$

が得られることになる。

## 補題 4.2

パラメータ $\delta$ をとりかえることで、(4.34) の $\sigma_k$ を 0 とすることができる。

証明

$\eta'(0) \neq 0$ なる関数 $\eta$ に対し $\delta = \eta(\tau)$ とすれば、$|\delta|$ の十分小さいところでは $\delta$ と $\tau$ は 1 対 1 に対応するので、パラメータ $\delta$ を $\tau$ で置きかえることができる。よって、そのようにとりえたものを $\bar{U}_k, \bar{s}_k$ と書くことにする:

$$\bar{U}_k(\tau) = U_k(\eta(\tau)), \quad \bar{s}_k(\tau) = s_k(\eta(\tau))$$

$\eta(0) = 0$ であれば

$$\bar{U}_k(0) = U_k(0), \quad \bar{s}_k(0) = s_k(0)$$

となる。また、

$$\bar{U}'_k(\tau) = U'_k(\eta(\tau))\eta'(\tau), \quad \bar{s}'_k(\tau) = s'_k(\eta(\tau))\eta'(\tau)$$

より、$\eta'(0) = 1$ であれば 1 階微分の $\tau = 0$ での値も変わらない。

$$\begin{aligned} \bar{U}''_k(\tau) &= \{U'_k(\eta(\tau))\eta'(\tau)\}' \\ &= U''_k(\eta(\tau))(\eta'(\tau))^2 + U'_k(\eta(\tau))\eta''(\tau) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \bar{U}''_k(0) &= U''_k(0)(\eta'(0))^2 + U'_k(0)\eta''(0) \\ &= (\nabla_U r_k \cdot r_k)(U_l) + \sigma_k r_k(U_l) + r_k(U_l)\eta''(0) \end{aligned}$$

なので、$\eta''(0) = -\sigma_k$ であれば、右辺は最初のものだけが残る。よって、

$$\eta(0) = 0, \quad \eta'(0) = 1, \quad \eta''(0) = -\sigma_k$$

であれば、

$$\begin{aligned}
&\bar{U}_k(0) = U_l,\\
&\bar{U}'_k(0) = r_k(U_l),\\
&\bar{U}''_k(0) = \nabla_U r_k(U_l) r_k(U_l),\\
&\bar{s}_k(0) = \lambda_k(U_l),\\
&\bar{s}'_k(0) = \frac{1}{2}(\nabla_U \lambda_k \cdot r_k)(U_l)
\end{aligned}$$

が成り立つ。このような $\eta(\tau)$ としては、例えば、

$$\eta(\tau) = \eta(0) + \eta'(0)\tau + \frac{\eta''(0)}{2}\tau^2 = \tau - \frac{\sigma_k}{2}\tau^2$$

ととればよい ($|\tau|$ は十分小のとき)。■

## 4.6 接触不連続

4.5 節の最後の (4.35) より、$k$-特性方向が真性非線形であれば $s'_k(0) > 0$ なので、少なくとも $\delta$ が 0 の近くであれば曲線 $U = U_k(\delta)$ に沿って $s$ も変化することがわかるが、$k$-特性方向が線形退化の場合には $s'_k(0) = 0$ となりあまり変化がない。これが実際に全く変化しないことをこの節で紹介する。

まず、$U = U_l$ を通り、ベクトル場 $r_k(U)$ に対する $\Omega$ 内の積分曲線 $U = V(\xi)$ を取る:

$$V'(\xi) = r_k(V(\xi)), \quad V'(0) = U_l$$

$k$-特性方向が線形退化の場合は、この積分曲線が $U = U_k(\delta)$ の作る曲線であることを示す。

$$\frac{d}{d\xi}\lambda_k(V(\xi)) = \nabla_U \lambda_k(V(\xi))V'(\xi) = \nabla_U \lambda_k(V(\xi)) r_k(\xi) = 0$$

より、$\lambda_k$ はこの積分曲線に沿って定数、すなわち、

$$\lambda_k(V(\xi)) \equiv \lambda_k(U_l) \tag{4.36}$$

であることがわかり、また、(4.36) より、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{d\xi}\{F(V(\xi)) - \lambda_k(U_l)V(\xi)\}\\
&= \nabla_U F(V)V' - \lambda(U_l)V' = \nabla_U F(V)r_k(V) - \lambda(U_l)r_k(V)\\
&= \{\lambda_k(V) - \lambda_k(U_l)\}r_k(V) = 0
\end{aligned}$$

となるので、$F(V(\xi) - \lambda_k(U_l)V(\xi)$ も定数、すなわち

$$F(V(\xi)) - \lambda_k(U_l)V(\xi) = F(U_l) - \lambda_k(U_l)U_l \tag{4.37}$$

が成り立つ。これは、$U_r = V(\xi)$, $s = \lambda_k(U_l)$ に対するランキン-ユゴニオ条件を意味している。この (4.37) と (4.27), (4.28) の関係を見るために、(4.37) を少し変形する。

$$F(V(\xi)) - F(U_l) = G(V(\xi))(V(\xi) - U_l)$$

なので、

$$G(V(\xi))(V(\xi) - U_l) = \lambda_k(U_l)(V(\xi) - U_l)$$

となり、よって、ある $j$ に対し、

$$\lambda_k(U_l) = \mu_j(V(\xi)), \quad V(\xi) - U_l \mathbin{/\!/} R_j(V(\xi))$$

となることがわかる。$\mu_j(V(\xi))$ は連続で $\lambda_k(U_l)$ は一定なので、$\xi$ 毎に $j$ は変化したりはせず、$\xi = 0$ では $\mu_j(V(\xi)) = \mu_j(U_l) = \lambda_j(U_l)$ なので $j = k$ でなければならない。

よって、あるスカラー関数 $c(\xi)$ によって

$$V(\xi) - U_l = c(\xi)R_k(V(\xi)) \tag{4.38}$$

となることになる。$V(0) = U_l$ であるから $c(0) = 0$ で、(4.38) を $\xi$ で微分して $\xi = 0$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
&V'(\xi) = c'(\xi)R_k(V(\xi)) + c(\xi)R_k(V(\xi))' \\
&V'(0) = c'(0)R_k(V(0)) + c(0)R_k(V(\xi))'(0) \\
&r_k(U_l) = c'(0)r_k(U_l)
\end{aligned}
$$

となるので、$c'(0) = 1$、よって $\delta = c(\xi)$ は $\xi = 0$ の近くで逆関数 $\xi = c^{-1}(\delta)$ を持つので、(4.38) と (4.28) を比較すれば、

$$V(\xi) = U(c(\xi)), \quad U(\delta) = V(c^{-1}(\delta))$$

となることがわかる。

結局、$k$-特性方向が線形退化の場合は、$U = U_k(\delta)$, $s = s_k(\delta)$ は、

$$
\begin{cases}
U_k'(\delta) \mathbin{//} r_k(U(\delta)) \\
s_k(\delta) = \lambda_k(U(\delta)) \equiv \lambda_k(U_l)
\end{cases}
\tag{4.39}
$$

を満たし、よって $s_k$ は $\delta$ に関して定数、$U = U_k(\delta)$ は相空間上で $r_k(U)$ の積分曲線を動くことになる。

これによる不連続解を、$k$-**接触不連続** ($k$-contact discontinuity) と呼ぶ。不連続線の方向は、左右の $k$-特性曲線の方向 ($\lambda_k(U_l) = \lambda_k(U_r)$) と一致する。

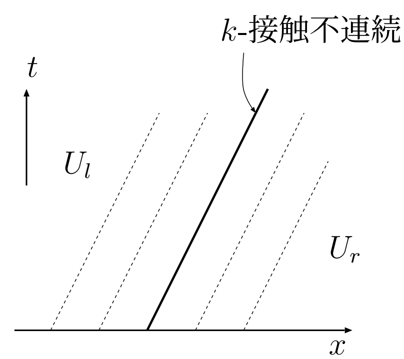



図 4.4: $k$-接触不連続解 (点線は $k$-特性曲線)

## 4.7 ラックス条件と衝撃波

今度は、$k$-特性方向が真性非線形の場合の不連続解について考えてみる。この場合、(4.34), (4.35) を満たす不連続解がすべて物理的に適切な解になっているかというと、実はそうではない。この節では、それを選別するラックス条件を紹介する。

(4.35) より、この場合は $s_k'(0) > 0$ であるから、$s_k(\delta)$ と $\lambda_k$ の間には次のような関係があることがわかる。

### 補題 4.3

$|\delta|$ が十分小さければ、$s_k = s_k(\delta)$ は次を満たす ($U_r = U_k(\delta)$ とする):

$$\delta > 0 \text{ のとき} \quad \begin{cases} \lambda_k(U_l) < s_k < \lambda_k(U_r), \\ \lambda_{k-1}(U_r) < s_k < \lambda_{k+1}(U_l) \end{cases} \tag{4.40}$$

$$\delta < 0 \text{ のとき} \quad \begin{cases} \lambda_k(U_r) < s_k < \lambda_k(U_l), \\ \lambda_{k-1}(U_l) < s_k < \lambda_{k+1}(U_r) \end{cases} \tag{4.41}$$

証明

まず、$s_k(0) = \lambda_k(U_l) = \lambda_k(U_k(0))$ より、

$$\lambda_{k-1}(U_k(0)) < s_k(0) < \lambda_{k+1}(U_k(0))$$

なので、$|\delta|$ が十分小さければ

$$\lambda_{k-1}(U_k(\delta)) < s_k(\delta) < \lambda_{k+1}(U_k(\delta)), \quad \lambda_{k-1}(U_k(\delta)) < s_k(\delta) < \lambda_{k+1}(U_k(\delta))$$

は成り立つので、(4.40), (4.41) の、それぞれ 2 本目の不等式は O.K.

また、$s_k'(0) > 0$ であるので、$|\delta|$ が十分小さければ、$\delta > 0$ のとき、

$$s_k(\delta) > s_k(0) = \lambda_k(U_l) > s_k(-\delta)$$

も言える。よって後は、

$$\begin{cases} \delta > 0 \text{ のとき } & \lambda_k(U_k(\delta)) > s_k(\delta), \\ \delta < 0 \text{ のとき } & \lambda_k(U_k(\delta)) < s_k(\delta) \end{cases}$$

を言えばよいが、(4.35) より、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\delta}\{\lambda_k(U_k(\delta)) - s_k(\delta)\}\Big|_{\delta=0} \\ = \ & \nabla_U\lambda_k(U_k(0))U_k'(0) - s_k'(0) = \nabla_U\lambda_k(U_l)r_k(U_l) - \frac{1}{2}\nabla_U\lambda_k(U_l)r_k(U_l) \\ = \ & \frac{1}{2}\nabla_U\lambda_k(U_l)r_k(U_l) > 0 \quad (\text{真性非線形より}) \end{aligned}$$

であり、$\lambda_k(U_k(0)) - s_k(0) = 0$ なのでこれも O.K. ■

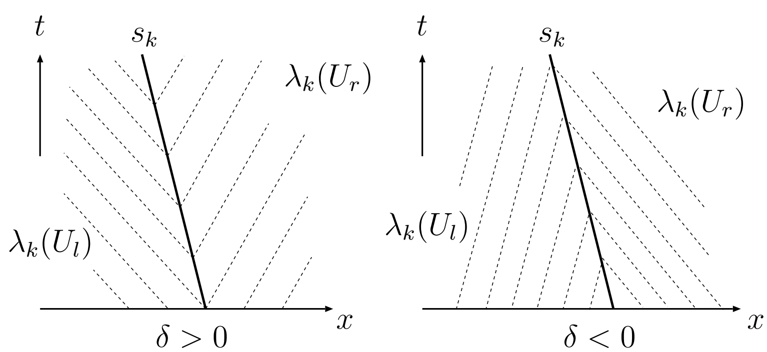



図 4.5: $\delta > 0$ と $\delta < 0$ の不連続線と特性曲線

ところが、この $\delta > 0$ の不連続解は、後で見るように解の一意性も保証しないし、理想気体の場合には膨張する (圧力が不連続線の通過にともなって減少する) 不連続解になっていて、エントロピーも減少させるものであることが知られているので、物理的には受け入れられないものである。

よって、真性非線形の場合は不連続解のうち、条件 (4.41) を満たすもののみを解として採用することとする。この条件 (4.41) を**ラックス条件** (Lax's condition) または**ラックスのエントロピー条件** と呼び、これを満たす不連続解を $k$-**衝撃波** ($k$-shock wave)、相空間上の曲線 $U = U_k(\delta)$ ($\delta \leq 0$) を $k$-**衝撃波曲線** ($k$-shock curve, $k$-shock wave curve) と呼ぶ。

なお、ここでは排除した $\delta > 0$ の場合の不連続解も全く無益なわけではなく、例えば最近保存則系方程式の研究で有益な手段である波面追跡法では、膨張波の近似にこの $\delta > 0$ の不連続解 (膨張的衝撃波とも呼ばれる) が利用される。

## 4.8 オイラー座標系の理想気体の場合

ここでは、オイラー座標系での理想気体の保存則方程式系 (3.12) の不連続解である 1-衝撃波、3-衝撃波、2-接触不連続を求めてみる。

ランキン-ユゴニオ条件はこの場合、

$$\begin{aligned} &s[\rho] = [\rho u], \\ &s[\rho u] = [\rho u^2 + P], \\ &s\left[\frac{1}{2}\rho u^2 + \rho e\right] = \left[\frac{1}{2}\rho u^3 + \rho e u + P u\right] \end{aligned} \tag{4.42}$$

となる。ここで、$[U] = U - U_0$ とする ($U_r = U$, $U_l = U_0$)。

まずは 2-接触不連続を求める。この場合、$U$ は $r_2(U) = {}^T(1,0,0)$ の積分曲線であるから、

$$U = U_0 + {}^T(\xi, 0, 0)$$

すなわち $P = P_0$, $u = u_0$ がその曲線となる。$s = s_2$ は

$$s = \lambda_2(U) = u = u_0$$

となる。この $[u] = [P] = 0$, $s = u_0$ が (4.42) を満たすことは、

$$[\rho u] = u_0[\rho] = s[\rho], \quad \rho e = \frac{1}{\gamma - 1}P, \quad \rho e u + P u = \frac{\gamma}{\gamma - 1}P u$$

等より容易に検証できる。この接触不連続は、固有ベクトルの積分曲線上を動くから、2-リーマン不変量 $\{u, P\}$ を定数にするもの、と考えることもできる。よって、2-接触不連続曲線 $C_2(U_0)$ は

$$\rho = \rho_0 + \delta, \quad u = u_0, \quad P = P_0 \quad (\delta > -\rho_0)$$

となる。

次は衝撃波を求める。(4.42) の 1 本目と 2 本目の式から $s$ を消去すると

$$[\rho][\rho u^2+P]=[\rho u]^2$$

となる。ここで、(4.20) より、一般に

$$\begin{aligned}&[\rho f][\rho g]-[\rho][\rho fg]\\ &\quad= [\rho f]([\rho]g_r+\rho_l[g])-[\rho]([\rho f]g_r+\rho_l f_l[g])=\rho_l[g]([\rho f]-[\rho]f_l)\\ &\quad= \rho_l\rho_r[f][g]\end{aligned} \tag{4.43}$$

が成り立つので、

$$[\rho u]^2-[\rho][\rho u^2]=\rho_0\rho[u]^2$$

となり、よって

$$\rho_0\rho[u]^2=[\rho][P] \tag{4.44}$$

が得られる。

また、(4.42) の 1 本目と 3 本目の式から $s$ を消去すると

$$[\rho][\rho Bu+Pu]=[\rho u][\rho B]\quad\left(B=\frac{u^2}{2}+e=\frac{u^2}{2}+\frac{P}{(\gamma-1)\rho}\right)$$

となるので、同様に (4.43) を使えば

$$\rho_0\rho[u][B]=[\rho][Pu] \tag{4.45}$$

が得られるが、

$$[u][B]=\frac{1}{2}[u][u^2]+\frac{1}{\gamma-1}[u]\left[\frac{P}{\rho}\right]=\frac{u+u_0}{2}[u]^2+\frac{1}{\gamma-1}[u]\left[\frac{P}{\rho}\right]$$

なので、(4.45) は

$$\rho_0\rho\frac{u+u_0}{2}[u]^2+\frac{\rho_0\rho}{\gamma-1}[u]\left[\frac{P}{\rho}\right]=[\rho][Pu]$$

と変形でき、これに (4.44) を代入すると、

$$\frac{u+u_0}{2}[\rho][P]+\frac{\rho_0\rho}{\gamma-1}[u]\left[\frac{P}{\rho}\right]=[\rho][Pu]$$

となる。ここで (4.20) より、

$$[Pu]=P[u]+u_0[P]=P_0[u]+u[P]$$

であるから足して 2 で割れば

$$[Pu]=\frac{P+P_0}{2}[u]+\frac{u+u_0}{2}[P]$$

となるので、結局

$$\frac{\rho_0\rho}{\gamma-1}[u]\left[\frac{P}{\rho}\right]=\frac{P+P_0}{2}[\rho][u]$$

が残ることになる。今 $[u]\neq 0$ であることを示そう。もし $[u]=0$ であると、(4.42) より

$$(s-u_0)[\rho]=0$$

となり、衝撃波では $s\neq\lambda_2(U_l)=u_0$ なので $[\rho]=0$ となり、

$$[\rho u^2+P]-s[\rho u]=u_0^2[\rho]+[P]-su_0[\rho]=[P]=0$$

となるので $[U]=0$ となってしまって不連続でなくなる。よって $[u]\neq 0$ でなければならない。よって、

$$\rho_0\rho\left[\frac{P}{\rho}\right]=\theta(P+P_0)[\rho]\quad\left(\theta=\frac{\gamma-1}{2}\right)$$

となる。これを展開して $P$ について解けば

$$P = P_0 \frac{\rho + \theta[\rho]}{\rho_0 - \theta[\rho]} = P_0 \frac{(1+\theta)\rho - \theta\rho_0}{(1+\theta)\rho_0 - \theta\rho}$$

となるので、$\rho/\rho_0 = \xi\ (>0)$ と置くと、

$$\frac{P}{P_0} = \frac{(1+\theta)\xi - \theta}{1+\theta-\theta\xi} = \frac{1+\theta}{\theta} \frac{\xi - \dfrac{\theta}{1+\theta}}{\dfrac{1+\theta}{\theta} - \xi}$$

となる。$1 < \gamma < 3$ より $0 < \theta < 1$ なので、$P/P_0$ が正であるためには

$$\frac{\theta}{1+\theta} < \xi < \frac{1+\theta}{\theta}$$

である必要がある。そして、(4.44) より、

$$\begin{aligned}[u]^2 &= \frac{[\rho]}{\rho_0\rho}[P] = \frac{\xi - 1}{\rho_0\xi} P_0 \left\{ \frac{(1+\theta)\xi - \theta}{1+\theta-\theta\xi} - 1 \right\} \\ &= \frac{(\xi-1)^2}{\xi(1+\theta-\theta\xi)} \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \quad (\gamma = 2\theta + 1)\end{aligned}$$

よって、

$$[u] = \pm C_0 f_0(\xi) \quad \left( C_0 = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}, \quad f_0(\xi) = \frac{\xi - 1}{\sqrt{\xi(1+\theta-\theta\xi)}} \right)$$

となる。以上により、$U$ は $\xi$ によって

$$\rho = \rho_0\xi, \quad u = u_0 \pm C_0 f_0(\xi), \quad P = P_0 \frac{(1+\theta)\xi - \theta}{1+\theta-\theta\xi} \tag{4.46}$$

のように表されることになる。

なお、これは $(\rho, u, P)$ での表現であり、厳密には $U$ ではなく、命題 3.2 の $W$ に相当する。この場合、命題 3.2 より、例えば接触不連続の条件 (4.39) は、$W$ で言えば

$$U_k'(\delta) = \nabla_W G(W_k(\delta)) W_k'(\delta) \quad (U_k(\delta) = G(W_k(\delta)) \text{ とする}) \tag{4.47}$$

より

$$\begin{cases} W_k'(\delta) \parallel \beta_k(U(\delta)) \\ s_k(\delta) = \lambda_k(U(\delta)) = \mu_k(W(\delta)) \end{cases}$$

となるので、$W$ の固有値、固有ベクトルで考えればよいことがわかる。衝撃波については、(4.34), (4.35) は次のようになる。

## 命題 4.4

$U = U_k(\delta)$, $s = s_k(\delta)$ が (4.34), (4.35) を満たすとき、$U_k(\delta) = G(W_k(\delta))$ とするとき、$W = W_k(\delta)$ に対して次が成り立つ:

$$\begin{cases} W_k(0) = W_l, \\ W_k'(0) = \beta_k(W_l), \\ W_k''(0) = \nabla_W \beta_k(W_l)\beta_k(W_l) + \sigma_k \beta_k(W_l) \end{cases} \tag{4.48}$$

$$\begin{cases} s_k(0) = \mu_k(W_l), \\ s_k'(0) = \dfrac{1}{2}(\nabla_W \mu_k \cdot \beta_k)(W_l) \end{cases} \tag{4.49}$$

$(G(W_l) = U_l)$

証明

命題 3.2 より (4.49) の方は明らかに成り立つ。また、(4.48) の最初の 2 本も命題 3.2 と式 (4.47) より明らか。よって、(4.48) の最後の式のみを示す。$U_k(\delta) = G(W_k(\delta))$ を $\delta$ で 2 階微分すると

$$U_k''(\delta) = \{\nabla_W G(W_k(\delta))\}' W_k'(\delta) + \nabla_W G(W_k(\delta)) W_k''(\delta)$$

となるので $\delta = 0$ を代入すると

$$U_k''(0) = \{\nabla_W G(W_k(\delta))\}'(0)\beta_k(W_l) + \nabla_W G(W_l) W_k''(0) \tag{4.50}$$

となる。

一方、命題 3.2 より

$$r_k(U_k(\delta)) = r_k(G(W_k(\delta))) = \nabla_W G(W_k(\delta))\beta_k(W_k(\delta))$$

であるので、この式を $\delta$ で微分すると

$$\begin{aligned}
&\nabla_U r_k(U_k(\delta))U_k'(\delta)\\
&\quad= \{\nabla_W G(W_k(\delta))\}'\beta_k(W_k(\delta)) + \nabla_W G(W_k(\delta))\beta_k(W_k(\delta))'\\
&\quad= \{\nabla_W G(W_k(\delta))\}'\beta_k(W_k(\delta)) + \nabla_W G(W_k(\delta))\nabla_W\beta_k(W_k(\delta))W_k'(\delta)
\end{aligned}$$

となり、$\delta = 0$ とすれば

$$\begin{aligned}
&\nabla_U r_k(U_l)r_k(U_l)\\
&\quad= \{\nabla_W G(W_k(\delta))\}'(0)\beta_k(W_l) + \nabla_W G(W_l)(\nabla_W\beta_k\cdot\beta_k)(W_l)
\end{aligned}\tag{4.51}$$

となるので、(4.50) と (4.51) の両辺を引き算すると、

$$U_k''(0) - \nabla_U r_k(U_l)r_k(U_l) = \nabla_W G(W_l)\{W_k''(0) - \nabla_W\beta_k(W_l)\beta_k(W_l)\}$$

となる。(4.34) より、この左辺は

$$\sigma_k r_k(U_l) = \nabla_W G(W_l)(\sigma_k\beta_k(W_l))$$

となるので、これで (4.48) の最後の式が得られる。■

よって、(4.34), (4.35) を考えるときは $(\rho, m, E)$ で考えても $(\rho, u, P)$ で考えても、同じ形で書けることになる。

式 (4.46) に戻る。

今、$\xi = 1+\tau$ として $f_0(\xi)$ を $\tau$ に関してマクローリン展開すると

$$\begin{aligned}
f_0(\xi) &= \frac{\tau}{\sqrt{(1+\tau)(1-\theta\tau)}} = \tau(1+\tau)^{-1/2}(1-\theta\tau)^{-1/2}\\
&= \tau\left\{1 - \frac{\tau}{2} + O(\tau^2)\right\}\left\{1 + \frac{\theta}{2}\tau + O(\tau^2)\right\} = \tau\left\{1 - \frac{1-\theta}{2}\tau + O(\tau^2)\right\}\\
&= \tau - \frac{1-\theta}{2}\tau^2 + O(\tau^3)
\end{aligned}$$

($O(\tau^n)$ は $n$ 次以上の次数の項の和を意味する)

となるので、

$$f_0(1) = 0, \quad f_0'(1) = 1, \quad f_0''(1) = -(1-\theta)$$

であることがわかる。同様に、

$$\begin{aligned}\frac{(1+\theta)\xi-\theta}{1+\theta-\theta\xi} = \frac{1+(1+\theta)\tau}{1-\theta\tau} &= \{1+\theta\tau+\theta^2\tau^2+O(\tau^3)\}\{1+(1+\theta)\tau\} \\ = \ 1+\gamma\tau+\theta\gamma\tau^2+O(\tau^3) \quad (\gamma = 2\theta+1)\end{aligned}$$

なので、

$$P(1) = P_0, \quad \frac{dP}{d\xi}(1) = \gamma P_0, \quad \frac{d^2P}{d\xi^2}(1) = 2\theta\gamma P_0$$

となる。よって、(4.46) の $U$ を $V_\pm(\xi)$ と書くことにすると、

$$V_\pm'(1) = \begin{bmatrix} \rho_0 \\ \pm C_0 \\ \gamma P_0 \end{bmatrix}$$

となるので、$V_+'(1) = r_3(U_0)$, $V_-'(1) = -r_1(U_0)$ となる。

これを 4.7 節の $U_k(\delta)$ と比較すると、

$$\begin{cases} U_3(\delta) = V_+(\xi_3(\delta)), \quad \xi_3(0) = 1, \quad \xi_3'(0) = 1 > 0 \\ U_1(\delta) = V_-(\xi_1(\delta)), \quad \xi_1(0) = 1, \quad \xi_1'(0) = -1 < 0 \end{cases} \tag{4.52}$$

のように書けることがわかり、よって、$U = V_+(\xi)$ $(\xi \leq 0)$ が 3-衝撃波曲線、$U = V_-(\xi)$ $(\xi \geq 0)$ が 1-衝撃波曲線を与える。

衝撃波速度 $s$ は、

$$\begin{aligned} s &= \frac{[\rho u]}{[\rho]} = \frac{[\rho]u_0+\rho[u]}{[\rho]} = u_0 + \frac{\rho}{\rho-\rho_0}[u] = u_0 + \frac{\xi}{\xi-1}(\pm C_0 f_0(\xi)) \\ &= u_0 \pm C_0\sqrt{\frac{\xi}{1+\theta-\theta\xi}} \end{aligned}$$

によって与えられる (複号は + が $s_3$, − が $s_1$)。

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{\xi}{1+\theta-\theta\xi}} &= \{1+(\xi-1)\}^{1/2}\{1-\theta(\xi-1)\}^{-1/2} \\
&= \left\{1+\frac{1}{2}(\xi-1)+O((\xi-1)^2)\right\}\left\{1+\frac{\theta}{2}(\xi-1)+O((\xi-1)^2)\right\} \\
&= 1+\frac{\theta+1}{2}(\xi-1)+O((\xi-1)^2) = 1+\frac{\gamma+1}{4}(\xi-1)+O((\xi-1)^2) \qquad (4.53)
\end{aligned}
$$

なので、(3.15) より

$$
\left.\frac{ds}{d\xi}\right|_{\xi=1} = \pm C_0\frac{\gamma+1}{4} = \pm\frac{1}{2}(\nabla_U\lambda_j\cdot r_j)(U_0)
$$

となるので、確かに

$$
\left.\frac{ds}{d\delta}\right|_{\delta=0} = \left.\frac{ds}{d\xi}\right|_{\xi=1}\xi_j'(0) = \frac{1}{2}(\nabla_U\lambda_j\cdot r_j)(U_0)
$$

となる。

また、$V_\pm$ の 2 階微分の $\xi=1$ での値も、

$$
V_\pm''(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mp(1-\theta)C_0 \\ 2\theta\gamma P_0 \end{bmatrix}
$$

と求められる。補題 4.2 に従って、この 2 階微分の値と $\nabla_U r_j\cdot r_j$ の値を比較してみる。

$$
\begin{aligned}
&\nabla_U r_1\cdot r_1 \\
&= \nabla_U\begin{bmatrix} -\rho \\ C \\ -\gamma P \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -\rho \\ C \\ -\gamma P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -C/(2\rho) & 0 & C/(2P) \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\rho \\ C \\ -\gamma P \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \rho \\ -\theta C \\ \gamma^2 P \end{bmatrix} \quad \left(\theta=\frac{\gamma-1}{2}\right), \\
&\nabla_U r_3\cdot r_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \nabla_U \begin{bmatrix} \rho \\ C \\ \gamma P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho \\ C \\ \gamma P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -C/(2\rho) & 0 & C/(2P) \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ C \\ \gamma P \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \rho \\ \theta C \\ \gamma^2 P \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
(\nabla_U r_1 \cdot r_1)(U_0) + r_1(U_0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -(\theta-1)C_0 \\ 2\theta\gamma P_0 \end{bmatrix} = V_-''(1) \quad (\gamma - 1 = 2\theta) \\
(\nabla_U r_3 \cdot r_3)(U_0) - r_3(U_0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ (\theta-1)C_0 \\ 2\theta\gamma P_0 \end{bmatrix} = V_+''(1) \quad (\gamma - 1 = 2\theta)
\end{aligned}
$$

となる。よって、(4.52) にさらに

$$
\xi_1''(0) = \xi_3''(0) = 1 \tag{4.54}
$$

であれば、

$$
\begin{aligned}
U_1''(0) &= V_-''(1)(\xi_1'(0))^2 + V_-'(1)\xi_1''(0) = (\nabla_U r_1 \cdot r_1)(U_0) + r_1(U_0) - r_1(U_0) \\
&= (\nabla_U r_1 \cdot r_1)(U_0), \\
U_3''(0) &= V_+''(1)(\xi_3'(0))^2 + V_+'(1)\xi_3''(0) = (\nabla_U r_3 \cdot r_3)(U_0) - r_3(U_0) + r_3(U_0) \\
&= (\nabla_U r_3 \cdot r_3)(U_0)
\end{aligned}
$$

となるので、この $\xi_j(\delta)$ によって補題 4.2 を満たす $U_j(\delta)$ が作れることになる。

(4.52), (4.54) を満たす満たす $\xi_1$, $\xi_3$ は、例えば

$$
\xi_1(\delta) = e^{-\delta}, \quad \xi_3(\delta) = e^{\delta}
$$

と取ればよいから、(4.46) の $-$ の方 ($V_-(\xi)$) に $\xi = e^{-\delta}$ ($\delta \leq 0$) を代入したのが 1-衝撃波曲線、$+$ の方 ($V_+(\xi)$) に $\xi = e^{\delta}$ ($\delta \leq 0$) を代入したのが 3-衝撃波曲線となる ($\delta \leq 0$

は補題 4.3 より)。ただし、$0 < P < \infty$ である必要があるので、1-衝撃波では

$$1 < \xi_1 = e^{-\delta} < \frac{1+\theta}{\theta}$$

3-衝撃波では

$$1 > \xi_3 = e^{\delta} > \frac{\theta}{1+\theta}$$

の範囲である必要がある。

## 4.9 ラグランジュ座標系の理想気体の場合

次はラグランジュ座標の方程式 (2.19) の場合を考える。ランキン-ユゴニオ条件はこの場合、

$$\begin{array}{l}\tilde{s}[\tilde{v}] = [\tilde{u}],\\ \tilde{s}[\tilde{u}] = [\tilde{P}],\\ \tilde{s}[\tilde{B}] = [\tilde{P}\tilde{u}]\end{array} \qquad \left(\tilde{B} = \frac{\tilde{u}^2}{2} + \tilde{e} = \frac{\tilde{u}^2}{2} + \frac{\tilde{P}\tilde{v}}{\gamma - 1}\right) \tag{4.55}$$

となる。

2-接触不連続の場合、$\tilde{s} = \lambda_2 = 0$ であるから、(4.55) より

$$[\tilde{u}] = [\tilde{P}] = 0$$

となる。これは、4.8 節のオイラー座標系の場合に対応している。

(4.55) から $\tilde{s}$ を消去すると、

$$-[\tilde{u}]^2 = [\tilde{P}][\tilde{v}] \tag{4.56}$$

$$[\tilde{P}\tilde{u}][\tilde{v}] = -[\tilde{u}][\tilde{B}] \tag{4.57}$$

が得られるが、(4.57) の右辺は 4.8 節と同様に、

$$\begin{aligned} -[\tilde{u}][\tilde{B}] &= -[\tilde{u}]\frac{1}{2}[\tilde{u}^2] - [\tilde{u}]\frac{1}{\gamma-1}[\tilde{P}\tilde{v}] = -\frac{\tilde{u}_0 + \tilde{u}}{2}[\tilde{u}]^2 - \frac{1}{\gamma-1}[\tilde{u}][\tilde{P}\tilde{v}] \\ &= \frac{\tilde{u}_0 + \tilde{u}}{2}[\tilde{P}][\tilde{v}] - \frac{1}{\gamma-1}[\tilde{u}][\tilde{P}\tilde{v}] \end{aligned}$$

(4.57) の左辺も 4.8 節と同様にして

$$[\tilde{P}\tilde{u}][\tilde{v}] = \frac{\tilde{u}_0+\tilde{u}}{2}[\tilde{P}][\tilde{v}] + \frac{\tilde{P}_0+\tilde{P}}{2}[\tilde{u}][\tilde{v}]$$

となるから、結局

$$\frac{\tilde{P}_0+\tilde{P}}{2}[\tilde{u}][\tilde{v}] = -\frac{1}{\gamma-1}[\tilde{u}][\tilde{P}\tilde{v}]$$

となる。$[\tilde{u}] = 0$ だとすると、1,3-衝撃波では $\tilde{s} \neq \lambda_2 = 0$ であるから、(4.55) より $[\tilde{v}] = [\tilde{P}] = 0$ となってしまって $[\tilde{U}] = 0$ となるので $[\tilde{u}] \neq 0$ であることがわかる。よって、

$$\frac{\tilde{P}_0+\tilde{P}}{2}[\tilde{v}] = -\frac{1}{\gamma-1}[\tilde{P}\tilde{v}]$$

となる。よって、展開して整理すると、

$$\frac{\tilde{P}}{\tilde{P}_0} = \frac{\tilde{v}_0-\theta[\tilde{v}]}{\tilde{v}+\theta[\tilde{v}]} = \frac{(1+\theta)\tilde{v}_0-\theta\tilde{v}}{(1+\theta)\tilde{v}-\theta\tilde{v}_0}$$

となるので、

$$\frac{\tilde{v}_0}{\tilde{v}}\left(=\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{\rho}_0}\right) = \xi$$

とすると、

$$\frac{\tilde{P}}{\tilde{P}_0} = \frac{(1+\theta)\xi-\theta}{1+\theta-\theta\xi} \quad \left(\frac{\theta}{1+\theta} < \xi < \frac{1+\theta}{\theta}\right)$$

となり、これらも 4.8 節の結果に対応する。また、(4.56) より、

$$\begin{aligned}
[\tilde{u}]^2 &= -[\tilde{P}][\tilde{v}] = -\left(\frac{\tilde{v}_0}{\xi}-\tilde{v}_0\right)\left(\tilde{P}_0\frac{(1+\theta)\xi-\theta}{1+\theta-\theta\xi}-\tilde{P}_0\right) \\
&= \tilde{P}_0\tilde{v}_0\frac{\xi-1}{\xi}\,\frac{\gamma(\xi-1)}{1+\theta-\theta\xi} \\
&= \tilde{C}_0^2\frac{(\xi-1)^2}{\xi(1+\theta-\theta\xi)} \quad \left(\tilde{C} = \sqrt{\gamma\tilde{P}\tilde{v}}\right)
\end{aligned}$$

なので、

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 \pm \tilde{C}_0 f_0(\xi)$$

となる。よって、$\tilde{U}$ は

$$\tilde{v} = \frac{\tilde{v}_0}{\xi}, \quad \tilde{u} = \tilde{u}_0 \pm \tilde{C}_0 f_0(\xi), \quad \tilde{P} = \tilde{P}_0 \frac{(1+\theta)\xi - \theta}{1+\theta-\theta\xi}$$

と書けることになる。これを $\tilde{V}_\pm(\xi)$ とすると、

$$\tilde{V}_\pm(1) = \begin{bmatrix} -\tilde{v}_0 \\ \pm\tilde{C}_0 \\ \gamma\tilde{P}_0 \end{bmatrix}$$

より、$\tilde{V}'_+(1) = r_3(\tilde{U}_0)$, $\tilde{V}'_-(1) = -r_1(\tilde{U}_0)$ となり、

$$\begin{cases} \tilde{U}_3(\delta) = \tilde{V}_+(\xi_3(\delta)), & \xi_3(0) = 1, \quad \xi'_3(0) = 1 > 0 \\ \tilde{U}_1(\delta) = \tilde{V}_-(\xi_1(\delta)), & \xi_1(0) = 1, \quad \xi'_1(0) = -1 < 0 \end{cases} \tag{4.58}$$

によって、$\tilde{U} = \tilde{V}_-(\xi)$ $(\xi \geq 0)$ が 1-衝撃波曲線、$\tilde{U} = \tilde{V}_+(\xi)$ $(\xi \leq 0)$ が 3-衝撃波曲線となることがわかる。

衝撃波速度 $\tilde{s}$ は、

$$\begin{aligned} \tilde{s} &= -\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} = \frac{\xi}{v_0(\xi-1)}(\pm\tilde{C}_0 f_0(\xi)) \\ &= \pm\frac{\tilde{C}_0}{v_0}\sqrt{\frac{\xi}{1+\theta-\theta\xi}} \end{aligned}$$

となる。(4.53), (3.23) より、

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\tilde{s}}{d\delta}\right|_{\delta=0} &= \left.\frac{d\tilde{s}}{d\xi}\right|_{\xi=1}\xi'_j(0) = \frac{\tilde{C}_0}{v_0}\,\frac{\gamma+1}{4} \\ &= \frac{1}{2}(\nabla_{\tilde{U}}\lambda_j \cdot r_j)(\tilde{U}_0) \end{aligned}$$

となる。

また、$\tilde{V}_\pm$ の 2 階微分は

$$\tilde{V}_\pm''(1) = \begin{bmatrix} 2\tilde{v}_0 \\ \mp(1-\theta)\tilde{C}_0 \\ 2\theta\gamma\tilde{P}_0 \end{bmatrix}$$

となるが、

$$\begin{aligned}
\nabla_{\tilde{U}} r_1 \cdot r_1 &= \nabla_{\tilde{U}} \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{C} \\ -\gamma\tilde{P} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{C} \\ -\gamma\tilde{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \tilde{C}/(2\tilde{v}) & 0 & \tilde{C}/(2\tilde{P}) \\ 0 & 0 & -\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{C} \\ -\gamma\tilde{P} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ -\theta\tilde{C} \\ \gamma^2\tilde{P} \end{bmatrix}, \\
\nabla_{\tilde{U}} r_3 \cdot r_3 &= \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \theta\tilde{C} \\ \gamma^2\tilde{P} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned}
(\nabla_{\tilde{U}} r_1 \cdot r_1)(\tilde{U}_0) + r_1(\tilde{U}_0) &= \begin{bmatrix} 2\tilde{v}_0 \\ (1-\theta)\tilde{C}_0 \\ 2\theta\gamma\tilde{P}_0 \end{bmatrix} = \tilde{V}_-''(1), \\
(\nabla_{\tilde{U}} r_3 \cdot r_3)(\tilde{U}_0) - r_3(\tilde{U}_0) &= \begin{bmatrix} 2\tilde{v}_0 \\ (\theta-1)\tilde{C}_0 \\ 2\theta\gamma\tilde{P}_0 \end{bmatrix} = \tilde{V}_+''(1)
\end{aligned}$$

となる。よって、(4.58) にさらに

$$\xi_1''(0) = \xi_3''(0) = 1 \tag{4.59}$$

であれば、

$$\tilde{U}_j''(0) = (\nabla_{\tilde{U}} r_j \cdot r_j)(\tilde{U}_0) \quad (j = 1, 3)$$

となる。

この (4.58), (4.59) を満たす $\xi_j(\delta)$ としては、

$$\xi_1(\delta) = e^{-\delta}, \quad \xi_3(\delta) = e^{\delta}$$

と取ればよい ($\delta \leq 0$)。この場合も、$0 < \tilde{P} < \infty$ である必要があるので、$\xi_1$ の方は

$$1 < \xi_1 = e^{-\delta} < \frac{1+\theta}{\theta}$$

$\xi_3$ の方は

$$1 > \xi_1 = e^{\delta} > \frac{\theta}{1+\theta}$$

である必要がある。

## 4.10 バロトロピックのオイラー座標系の場合

次はバロトロピックオイラー座標系の場合の方程式 (2.10), (2.15) ($P = P(\rho)$, $P' > 0$) を考える。この場合は、ランキン-ユゴニオ条件は

$$\begin{aligned} &s[\rho] = [\rho u], \\ &s[\rho u] = [\rho u^2 + P(\rho)] \end{aligned}$$

であるから、$s$ を消去すると

$$[\rho u]^2 = [\rho][\rho u^2 + P]$$

となり、

$$[\rho u]^2 - [\rho][\rho u^2] = \rho_0 \rho [u]^2$$

であるから、

$$[u] = \pm\sqrt{\frac{[\rho][P]}{\rho_0\rho}} = \pm\sqrt{\frac{(\rho-\rho_0)(P(\rho)-P(\rho_0))}{\rho_0\rho}}$$

よって、

$$u = u_0 \pm (\rho-\rho_0)f_1(\rho;\rho_0) \qquad \left(f_1(\rho;\rho_0) = \frac{1}{\sqrt{\rho_0\rho}}\sqrt{\frac{P(\rho)-P(\rho_0)}{\rho-\rho_0}}\right)$$

となる。$\rho=\rho_0$ でのテイラー展開を利用すると、

$$\begin{aligned}
f_1(\rho;\rho_0) &= \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\rho^{-1/2}\left\{P'(\rho_0)+\frac{1}{2}P''(\rho_0)(\rho-\rho_0)+O((\rho-\rho_0)^2)\right\}^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\left\{\rho_0\left(1+\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\right)\right\}^{-1/2}\sqrt{P'(\rho_0)} \\
&\quad \times\left\{1+\frac{P''(\rho_0)}{2P'(\rho_0)}(\rho-\rho_0)+O((\rho-\rho_0)^2)\right\}^{1/2} \\
&= \frac{\sqrt{P_0'}}{\rho_0}\left\{1-\frac{\rho-\rho_0}{2\rho_0}+O((\rho-\rho_0)^2)\right\}\left\{1+\frac{P_0''}{4P_0'}(\rho-\rho_0)+O((\rho-\rho_0)^2)\right\} \\
&= \frac{\sqrt{P_0'}}{\rho_0}\left\{1+\left(\frac{P_0''}{4P_0'}-\frac{1}{2\rho_0}\right)(\rho-\rho_0)+O((\rho-\rho_0)^2)\right\} \\
&\quad (P_0' = P'(\rho_0), \quad P_0'' = P''(\rho_0))
\end{aligned}$$

となるので、

$$f_1\Big|_{\rho=\rho_0} = \frac{\sqrt{P_0'}}{\rho_0}, \quad \frac{df_1}{d\rho}\Big|_{\rho=\rho_0} = \frac{\rho_0P_0''-2P_0'}{4\rho_0^2\sqrt{P_0'}}$$

となる。なお、この微分の値は、$P=A\rho^\gamma$, $1<\gamma<3$ の場合は、

$$\rho_0P_0''-2P_0' = \gamma(\gamma-1)\frac{P_0}{\rho_0}-2\gamma\frac{P_0}{\rho_0} = -\gamma(3-\gamma)\frac{P_0}{\rho_0}$$

となるので負となる。

よって、

$$
\begin{aligned}
u\Big|_{\rho=\rho_0} &= u_0, \\
\frac{du}{d\rho}\Big|_{\rho=\rho_0} &= \pm\left\{f_1+(\rho-\rho_0)\frac{df_1}{d\rho}\right\}\Big|_{\rho=\rho_0}=\pm\frac{\sqrt{P_0'}}{\rho_0}, \\
\frac{d^2u}{d\rho^2}\Big|_{\rho=\rho_0} &= \pm\left\{2\frac{df_1}{d\rho}+(\rho-\rho_0)\frac{d^2f_1}{d\rho^2}\right\}\Big|_{\rho=\rho_0}=\pm\frac{\rho_0P_0''-2P_0'}{2\rho_0^2\sqrt{P_0'}}
\end{aligned}
$$

となる。よって、

$$
V_\pm(\rho)=\begin{bmatrix}\rho\\ u\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\rho\\ u_0\pm(\rho-\rho_0)f_1(\rho;\rho_0)\end{bmatrix}
$$

とすると、

$$
V_\pm'(\rho_0)=\begin{bmatrix}1\\ \pm\sqrt{P_0'}/\rho_0\end{bmatrix}=\frac{\pm1}{\rho_0}\begin{bmatrix}\pm\rho_0\\ \sqrt{P_0'}\end{bmatrix}
$$

となるので、

$$
V_+'(\rho_0)=\frac{1}{\rho_0}r_2(U_0),\quad V_-'(\rho_0)=-\frac{1}{\rho_0}r_1(U_0)
$$

であることがわかる。よって、

$$
\left\{\begin{array}{l}U_2(\delta)=V_+(\rho_2(\delta)),\quad \rho_2(0)=\rho_0,\quad \rho_2'(0)=\rho_0\\ U_1(\delta)=V_-(\rho_1(\delta)),\quad \rho_1(0)=\rho_0,\quad \rho_1'(0)=-\rho_0\end{array}\right.
$$

によって $U_j(0)=U_0$, $U_j'(0)=r_j(U_0)$ となる。

さらに、

$$
V_\pm''(\rho_0)=\begin{bmatrix}0\\ \pm(\rho_0P_0''-2P_0')/(2\rho_0^2\sqrt{P_0'})\end{bmatrix}
$$

であり、

$$
\begin{aligned}
\nabla_U r_1 \cdot r_1 &= \nabla_U \begin{bmatrix} -\rho \\ \sqrt{P'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\rho \\ \sqrt{P'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ P''/(2\sqrt{P'}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\rho \\ \sqrt{P'} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \rho \\ -\rho P''/(2\sqrt{P'}) \end{bmatrix}, \\
\nabla_U r_2 \cdot r_2 &= \nabla_U \begin{bmatrix} \rho \\ \sqrt{P'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho \\ \sqrt{P'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho P''/(2\sqrt{P'}) \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

となるので、

$$
\begin{aligned}
&(\nabla_U r_1 \cdot r_1 + r_1)(U_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{P_0'} - \rho_0 P_0''/(2\sqrt{P_0'}) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ (2P_0' - \rho_0 P_0'')/(2\sqrt{P_0'}) \end{bmatrix} = \rho_0^2 V_-''(\rho_0), \\
&(\nabla_U r_2 \cdot r_2 - r_2)(U_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho_0 P_0''/(2\sqrt{P_0'}) - \sqrt{P_0'} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ (\rho_0 P_0'' - 2P_0')/(2\sqrt{P_0'}) \end{bmatrix} = \rho_0^2 V_+''(\rho_0)
\end{aligned}
$$

であるから、$\rho_1''(0) = \rho_2''(0) = \rho_0$ であれば、

$$
\begin{aligned}
U_1''(0) &= V_-''(\rho_0)(\rho_1'(0))^2 + V_-'(\rho_0)\rho_1''(0) \\
&= (\nabla_U r_1 \cdot r_1 + r_1)(U_0) - \frac{1}{\rho_0} r_1(U_0)\rho_0 = (\nabla_U r_1 \cdot r_1)(U_0), \\
U_2''(0) &= (\nabla_U r_2 \cdot r_2 - r_2)(U_0) + \frac{1}{\rho_0} r_2(U_0)\rho_0 = (\nabla_U r_2 \cdot r_2)(U_0)
\end{aligned}
$$

となる。

$s$ は、

$$
s = \frac{[\rho u]}{[\rho]} = \frac{\rho[u] + u_0[\rho]}{[\rho]} = u_0 + \rho\frac{[u]}{[\rho]} = u_0 \pm \rho f_1(\rho; \rho_0)
$$

であるから、

$$\begin{aligned} s(\rho_0) &= u_0 \pm \rho_0 f_1(\rho_0;\rho_0) = u_0 \pm \sqrt{P_0'} = \lambda_j(U_0), \\ \frac{ds}{d\rho}(\rho_0) &= \pm\left(f_1 + \rho\frac{df_1}{d\rho}\right)(\rho_0) = \pm\left(\frac{P_0'}{\rho_0} + \frac{\rho_0 P_0'' - 2P_0'}{4\rho_0\sqrt{P_0'}}\right) \\ &= \pm\frac{\rho_0 P_0'' + 2P_0'}{4\rho_0\sqrt{P_0'}} = \frac{1}{2\rho_0}(\nabla_U \lambda_j \cdot r_j)(U_0) \end{aligned}$$

となり、確かに

$$\left.\frac{ds}{d\delta}\right|_{\delta=0} = \left.\frac{ds}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_0}\rho_j'(0) = \frac{1}{2}(\nabla_U \lambda_j \cdot r_j)(U_0)$$

となる。

この場合、$\rho_1(\delta)$, $\rho_2(\delta)$ としては、例えば

$$\rho_1(\delta) = \rho_0 e^{-\delta}, \quad \rho_2(\delta) = \rho_0 e^{\delta}$$

と取ればよい。

## 4.11 バロトロピックのラグランジュ座標系の場合

バロトロピックのラグランジュ座標系の場合は、ランキン-ユゴニオ条件は

$$\begin{aligned} &\tilde{s}[\tilde{v}] = -[\tilde{u}], \\ &\tilde{s}[\tilde{u}] = [\tilde{P}(\tilde{v})] \end{aligned}$$

となるので、$\tilde{s}$ を消去すると

$$-[\tilde{u}]^2 = [\tilde{v}][\tilde{P}]$$

よって、

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \tilde{u}_0 \pm \sqrt{-[\tilde{v}][\tilde{P}]} = \tilde{u}_0 \pm \sqrt{-(\tilde{v}-\tilde{v}_0)(\tilde{P}(\tilde{v}_0) - \tilde{P}(\tilde{v}))} \\ &= \tilde{u}_0 \pm (\tilde{v}_0 - \tilde{v})\sqrt{-\frac{\tilde{P}(\tilde{v}) - \tilde{P}(\tilde{v}_0)}{\tilde{v}-\tilde{v}_0}} = \tilde{u}_0 \pm (\tilde{v}_0 - \tilde{v}) f_2(\tilde{v};\tilde{v}_0) \end{aligned}$$

となるので、

$$\tilde{V}_{\pm}(\tilde{v}) = \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{u}_0 \mp (\tilde{v}-\tilde{v}_0) f_2(\tilde{v};\tilde{v}_0) \end{bmatrix}$$

とすると、

$$\begin{aligned} f_2(\tilde{v};\tilde{v}_0) = & \left\{ -\tilde{P}'(\tilde{v}_0) - \frac{1}{2}\tilde{P}''(\tilde{v}_0)(\tilde{v}-\tilde{v}_0) + O((\tilde{v}-\tilde{v}_0)^2) \right\}^{1/2} \\ = & \sqrt{-\tilde{P}_0'} \left\{ 1 + \frac{\tilde{P}_0''}{2\tilde{P}_0'}(\tilde{v}-\tilde{v}_0) + O((\tilde{v}-\tilde{v}_0)^2) \right\}^{1/2} \\ = & \sqrt{-\tilde{P}_0'} \left\{ 1 + \frac{\tilde{P}_0''}{4\tilde{P}_0'}(\tilde{v}-\tilde{v}_0) + O((\tilde{v}-\tilde{v}_0)^2) \right\} \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} \tilde{V}_{\pm}(\tilde{v}_0) &= \tilde{U}_0, \\ \tilde{V}_{\pm}'(\tilde{v}_0) &= \begin{bmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{-\tilde{P}_0'} \end{bmatrix} = \mp r_j(U_0) \quad (\text{複号は上が } j=2,\ \text{下が } j=1), \\ \tilde{V}_{\pm}''(\tilde{v}_0) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mp 2\sqrt{-\tilde{P}_0'}\tilde{P}_0''/(4\tilde{P}_0') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 2\tilde{P}_0''/\left(2\sqrt{-\tilde{P}_0'}\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \nabla_{\tilde{U}} r_j \cdot r_j &= \nabla_{\tilde{U}} \begin{bmatrix} \mp 1 \\ \sqrt{-\tilde{P}'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mp 1 \\ \sqrt{-\tilde{P}'} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\tilde{P}''/\left(2\sqrt{-\tilde{P}'}\right) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mp 1 \\ \sqrt{-\tilde{P}'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm\tilde{P}''/\left(2\sqrt{-\tilde{P}'}\right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

なので、

$$\tilde{U}_j(\delta) = \tilde{V}_{\pm}(\tilde{v}_j(\delta)), \quad \tilde{v}_j(0) = \tilde{v}_0, \quad \tilde{v}_j'(0) = \mp 1, \quad \tilde{v}_j''(0) = 0$$

とすれば、

$$\tilde{U}_j(0)=\tilde{U}_0,\quad \tilde{U}_j'(0)=r_j(\tilde{U}_0),\quad \tilde{U}_j''(0)=(\nabla_{\tilde{U}}r_j\cdot r_j)(\tilde{U}_0)$$

となる。

$\tilde{s}$ は

$$\tilde{s}=-\frac{[\tilde{u}]}{[\tilde{v}]}=\pm f_2(\tilde{v};\tilde{v}_0)$$

より、

$$\left.\frac{d\tilde{s}}{d\delta}\right|_{\delta=0}=\left.\frac{d\tilde{s}}{d\tilde{v}}\right|_{\tilde{v}=\tilde{v}_0}\tilde{v}_j'(0)=\mp\frac{\tilde{P}_0''}{4\sqrt{-\tilde{P}_0'}}(\mp 1)=\frac{1}{2}(\nabla_{\tilde{U}}\lambda_j\cdot r_j)(\tilde{U}_0)$$

となる。

この場合は、$\tilde{v}_j(\delta)$ は、例えば

$$\tilde{v}_1(\delta)=\tilde{v}_0+\delta,\quad \tilde{v}_2(\delta)=\tilde{v}_0-\delta\quad(\delta\leq 0)$$

と取ればよい。

# 5　リーマン問題の解

## 5.1　はじめに

3 節、4 節で見てきたように、保存則方程式

$$U_t+F(U)_x=0 \tag{5.1}$$

は、膨張波、衝撃波、接触不連続といった単純な形の波の解を持つ。この節では、この方程式 (5.1) のいわゆるリーマン問題、すなわち初期値が

$$U(0,x)=\begin{cases}U_l & (x<0)\\ U_r & (x>0)\end{cases} \tag{5.2}$$

であるような解を考えることにする。

ところで、よく、なぜこのような初期値に対する問題を考えるのか、と聞かれることがある。それに対する理由のようなものを以下に紹介する。

- 保存則方程式は、初期値が滑らかな関数であっても、衝撃波のような不連続な解が起こるが、特に、衝撃波同士が衝突した後はどのようになるか、ということを調べようと考えると、それは局所的にはリーマン問題となる。

  実際リーマンは、衝撃波同士の衝突後の様子の問題の一般化としてリーマン問題を考え始めたようである。

- 保存則方程式は、スケール変換 $(t,x)\mapsto(at,ax)$ に対して不変であるので、$x/t$ の関数の形の自己相似解を持つことになる。そのような自己相似解の初期値問題は自然にリーマン問題となる。

- いわゆる衝撃波管の実験に対応し、工学的な応用面でも重要である。

  なお、衝撃波管とは、長い管の真ん中に仕切りを置いて、その両側を別な圧力や密度の気体で満たし、ある瞬間にその仕切りを外し、その後の (高速に進む) 気体の変化を調べる、という実験装置である。

- 現在知られている、保存則方程式の一般的な初期値に対する解の存在証明のうち、Glimm の差分法や Lax-Friedrichs 差分、Godunov 差分といった方法は、このリーマン問題の解に基づいていて、その解をブロックのように積み上げげた近似解を評価し極限を取ることで一般的な解を得る (近似解を作る「煉瓦ブロック」と呼ばれることもある)。

  しかもこれらの差分法は、実際に計算機による数値計算に利用されることもあるので、リーマン問題を解くことはそのような応用面でも重要である。

以下に、このリーマン問題の解を構成する、これまで考察した単純波 (膨張波、衝撃波、接触不連続) の性質を以下にまとめてみる。なお、それらの波の中心は原点 $(t,x)=(0,0)$ であるとし、波の左右が定数ベクトル $V_l$, $V_r$ であるとする。

- $k$-特性方向:

  **$k$-膨張波, $k$-衝撃波:** $k$-特性方向が真性非線形のとき

  **$k$-接触不連続:** $k$-特性方向が線形退化のとき

- 連続性:

$k$-**膨張波:** 連続 (つなぎ目はリプシッツ連続)

$k$-**衝撃波**, $k$-**接触不連続:** 不連続

- 波の範囲:

$k$-**膨張波:** $\lambda_k(V_l) \leq x/t \leq \lambda_k(V_r)$ の扇形領域

$k$-**衝撃波**, $k$-**接触不連続:** $x = s_k t$ の一本の不連続線 (断層)

- 波と左右の特性速度との関係:

$k$-**膨張波:** 波の両端は $k$-特性速度に一致

$k$-**衝撃波:** $\lambda_k(V_l) > s_k > \lambda_k(V_r)$

$k$-**接触不連続:** $\lambda_k(V_l) = s_k = \lambda_k(V_r)$

- $V_l$ と $V_r$ の関係:

$k$-**膨張波:** $V_r$ は $V_l$ から出る $r_k(U)$ の積分曲線 (半曲線) $R_k(V_l)$ 上

$k$-**衝撃波:** $V_r$ は $V_l$ から出る半曲線 $S_k(V_l)$ 上

$k$-**接触不連続:** $V_r$ は $V_l$ を通る $r_k(U)$ の積分曲線 $C_k(V_l)$ 上 ($V_l$ の両側)

## 5.2 波の位置

リーマン問題の解は、後で示すようにこれら膨張波、衝撃波、接触不連続の波を並べて構成される (図 5.1)。この図にある $r_j$ は膨張波、$s_j$ は衝撃波、または接触不連続で

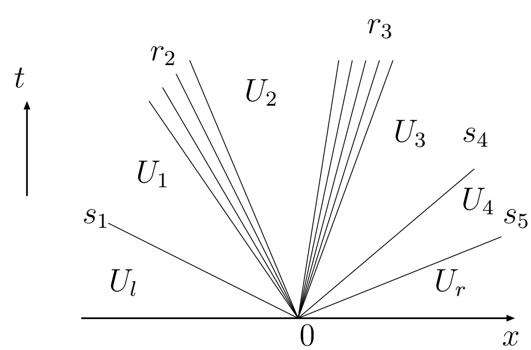



図 5.1: リーマン問題の解の例

あり、$U_j$ は、この領域では解はその定数ベクトルであることを意味する。

このように同じ点を出発する場合、それらの波は同じ特性方向の波は 1 つしかなく、左から 1,2,...,$N$ という順の特性方向の波しか並び得ないことを以下に見てみる。

まず、定数ベクトルを挟んで、その左に $j$-膨張波、右に $k$-衝撃波がある場合を考える (図 5.2)。この場合、膨張波の右端の速度 $dx/dt$ は $\lambda_j(U_m)$ であるから

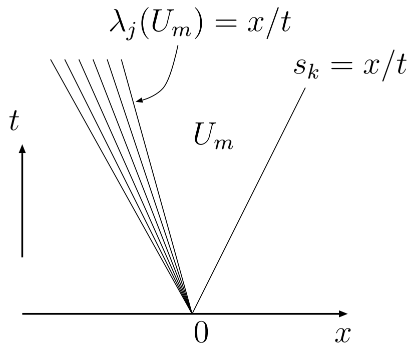



図 5.2: $j$-膨張波の右に $k$-衝撃波 (または $k$-接触不連続)

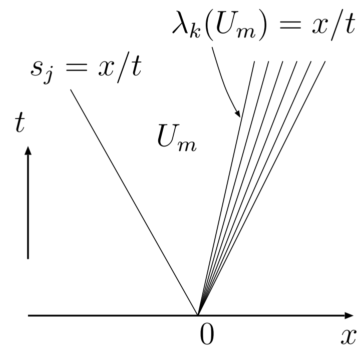



図 5.3: $j$-衝撃波 (または $j$-接触不連続) の右に $k$-膨張波

$$\lambda_j(U_m) < s_k$$

となるが、ラックス条件 (4.41) より

$$\lambda_k(U_m) > s_k$$

となるので、よって、

$$\lambda_j(U_m) < \lambda_k(U_m)$$

すなわち $j < k$ が示される。よって、左にある波の $j$ の方が右の $k$ よりも小さくなくてはならない。

なお、この $k$-衝撃波が $k$-接触不連続である場合も、ラックス条件の代わりに

$$\lambda_k(U_m) = s_k$$

が成り立つので、やはり $\lambda_j(U_m) < \lambda_k(U_m)$ となり $j < k$ が言える。

$j$-衝撃波の右に $k$-膨張波がある場合 (図 5.3) は、$s_j < \lambda_k(U_m)$ であるが、ラックス条件により $s_j > \lambda_j(U_m)$ となるので $\lambda_j(U_m) < \lambda_k(U_m)$ となるので、やはり $j < k$ となる。この $j$-衝撃波が $j$-接触不連続である場合も、ラックス条件の代わりに $s_j = \lambda_j(U_m)$ となるので、やはり $\lambda_j(U_m) < \lambda_k(U_m)$ となるので $j < k$ が言える。

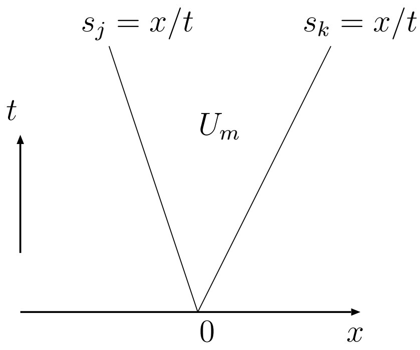



図 5.4: $j$-不連続波と $k$-不連続波

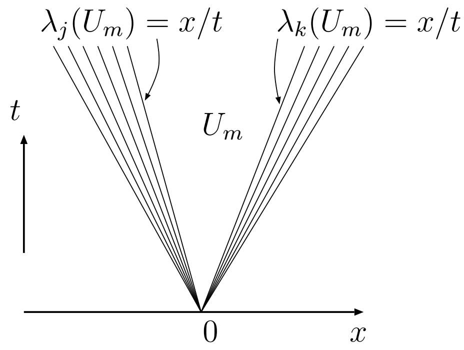



図 5.5: $j$-膨張波と $k$-膨張波

$U_m$ をはさんで $j$-不連続波 (衝撃波、または接触不連続) の右に $k$-不連続波がある場合 (図 5.4) は、$s_j < s_k$ であるが、衝撃波と接触不連続のいずれの場合も、

$$s_j \geq \lambda_j(U_m), \quad s_k \leq \lambda_k(U_m)$$

が成り立つので、$\lambda_j(U_m) < \lambda_k(U_m)$ となり $j < k$ が言える。

$U_m$ をはさんで $j$-膨張波と $k$-膨張波が並んでいる場合 (図 5.5) は、$U_m$ に接する波の端の部分を見れば

$$\lambda_j(U_m) < \lambda_k(U_m)$$

であるから $j < k$ となる。

よって、いずれの場合も同じ始点を持つ 2 つの波が並ぶ場合は、必ず $j < k$ が成り立つことがわかる。よって、考えられる配置は、左から 1,2,. . . ,$N$ という順の特性方向の波のみで、その間に定数ベクトルが並ぶことになる。

## 5.3 衝撃波曲線と膨張波曲線

5.1 節で見たように、$k$-特性方向が線形退化である場合は $k$-接触不連続のみが起こり、その左右の定数ベクトル $U_l$ と $U_r$ に対しては、$U_r$ は $U_l$ を通る $r_k(U)$ の積分曲線 $(C_k(U_l))$ 上の点である必要があり、よってその選択は 1 次元の自由度のみを持つ。

また、$k$-特性方向が真性非線形である場合は、$k$-膨張波か $k$-衝撃波が起こり、その左右の定数ベクトル $U_l$ と $U_r$ に対しては、$U_r$ が膨張波曲線 $R_k(U_l)$ 上にあるか、$U_r$ が衝撃波曲線 $S_k(U_l)$ 上にあるか、のみが許される。なお、この $R_k(U_l)$ と $S_k(U_l)$ は、相空間 $\Omega$ 上でいずれも $U_l$ から出発する半曲線であるが、実は、それらは綺麗につながることがわかる。

## 命題 5.1

$k$-特性方向が真性非線形である場合、$R_k(U_l)$ と $S_k(U_l)$ は $U = U_l$ で $C^2$ で (すなわち 2 階導関数まで連続に) つながる。

証明

補題 4.2 より、$S_k(U_l)$ は、

$$\begin{array}{l} U = \hat{U}_k(\delta)\ (\delta \le 0), \\ \hat{U}_k(0) = U_l, \quad \hat{U}_k'(0) = r_k(U_l), \quad \hat{U}_k''(0) = (\nabla_U r_k \cdot r_k)(U_l) \end{array}$$

と表される。一方、$R_k(U_l)$ は $r_k(U)$ の積分曲線であるからそれを $U = \check{U}_k(\delta)$ と書けば、それは

$$\check{U}_k'(\delta) = r_k(\check{U}_k(\delta)), \quad \check{U}_k(0) = U_l$$

を満たし、かつ $\lambda_k(U)$ の増加する方向なので、

$$\frac{d}{d\delta}\lambda_k(\check{U}_k(\delta)) = \nabla_U \lambda_k(\check{U}_k(\delta))\check{U}_k'(\delta) = \nabla_U \lambda_k(\check{U}_k(\delta)) r_k(\check{U}_k(\delta)) > 0$$

より、$\delta > 0$ の部分の半曲線となる。よって、

$$\begin{aligned} \check{U}_k'(0) &= r_k(U_l), \\ \check{U}_k''(0) &= \nabla_U r_k(\check{U}_k(\delta))\check{U}_k'(\delta)\Big|_{\delta=0} = \nabla_U r_k(U_l) r_k(U_l) \end{aligned}$$

なので、

$$U = U_k(\delta) = \begin{cases} \hat{U}_k(\delta) & (\delta < 0) \\ \check{U}_k(\delta) & (\delta \ge 0) \end{cases}$$

とすれば、確かに $C^2$ でつながることがわかる。■

## 5.4 解の存在定理

これまで考察してきた保存則方程式 (5.1) の単純波は、例えば衝撃波の構造は大域的に存在の保証があるわけではなく、局所的に (十分小さい $|\delta|$ に対して) それが示されたに過ぎず、よって、リーマン問題 (5.2) の解も、後で例で示すように相空間 $\Omega$ の任意の $U_l, U_r$ に対して存在するわけではない。

しかし、$U_l, U_r$ が十分近ければ、その解が今まで紹介した単純波で構成できることが知られている ([5])。

### 定理 5.2

双曲型保存則方程式 (5.1) のすべての $k$-特性方向が、$\Omega$ 内で真性非線形であるか、または線形退化である場合、$\Omega$ 内の各 $\bar{U}$ に対し、$\bar{U}$ を含む十分小さい近傍 $Q$ $(\subset \Omega)$ をとれば、この $Q$ 内の任意の $U_l, U_r$ に対して、リーマン問題 (5.2) の解は、原点を出発する高々 $N$ 個の単純波 (膨張波、衝撃波、接触不連続) と、それにはさまれる高々 $(N+1)$ 個の定数ベクトル (一番左と一番右は $U_l, U_r$) によって構成できる。

この定理は、後で説明するように気体の例の場合は具体的に解を構成する手順を与えられるし、$U_l$ と $U_r$ が近くない場合でも解が求められる場合もあるが、一般の方程式 (5.1) の場合は陰関数定理によって十分近くの $U_l, U_r$ に対して解の存在が示せるにすぎず、具体的に構成するのも難しい。しかし少なくともそのような $U_l, U_r$ に対して必ずその形で $U_l$ から $U_r$ へ単純波をつないで解を作ることができることが保証される。

証明

$k$-特性方向が真性非線形である場合は、命題 5.1 の証明にある $U_k(\delta)$ を $U_k(\delta; U_l)$ と書くこととし ($\delta > 0$ のときは膨張波の右に現われるベクトル、$\delta < 0$ のときは衝撃波の右に現われるベクトル)、$k$-特性方向が線形退化である場合は、$U_k(\delta; U_l)$ を

$$U'(\delta) = r_k(U(\delta)), \quad U(0) = U_l$$

を満たすものであるとすれば (接触不連続の右に現われるベクトル)、$U_k(\delta; U_0)$ は、$U_0$

と単純波を挟んで右に表われるベクトルで、いずれも以下を満たす:

$$U_k'(0;U_0)=r_k(U_0)$$

このとき、

$$V_1=U_1(\delta_1;U_0),\quad V_2=U_2(\delta_2;V_1),\quad \ldots,\quad V_N=U_N(\delta_N;V_N)$$

とすると、$V_N$ は $\delta_1$, $\delta_2$, ..., $\delta_N$, および $U_0$ の関数となる。それを $T(\delta_1,\ldots,\delta_N;U_0)$ と書くことにする:

$$V_N=T(\delta_1,\ldots,\delta_N;U_0)=U_N(\delta_N;U_{N-1}(\delta_{N-1};\ldots U_1(\delta_1;U_0)\ldots))$$

このとき、リーマン問題の解を求めることは、方程式

$$U_r=T(\delta_1,\ldots,\delta_N;U_l)$$

を満たす $\delta_1$,...,$\delta_N$ を求めることになる。

$U_k(0;V_{k-1})=V_{k-1}$ なので、

$$T(\delta_1,\ldots,\delta_j,0,\ldots,0;U_0)=V_j=U_j(\delta_j;V_{j-1}),\quad T(0,\ldots,0;U_0)=U_0$$

が言える。よって、

$$T(0,\ldots,0,\delta_j,0,\ldots,0;U_0)=U_j(\delta_j;U_0)$$

であり、

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \delta_j}(0,\ldots,0;U_0)&=\lim_{\delta_j\to 0}\frac{T(0,\ldots,0,\delta_j,0,\ldots,0;U_0)-T(0,\ldots,0;U_0)}{\delta_j}\\ &= =\lim_{h\to 0}\frac{U_j(h;U_0)-U_0}{h}=U_j'(0;U_0)=r_j(U_0)\end{aligned}$$

となる。よって、

$$\left|\frac{\partial T}{\partial \delta_1}\ \cdots\ \frac{\partial T}{\partial \delta_N}\right|(0,\ldots,0;U_0)=|r_1(U_0)\ \ldots\ r_N(U_0)|\neq 0$$

となる。任意の $\bar{U}\in\Omega$ に対し

$$T(0,\ldots,0;\bar{U})-\bar{U}=0$$

であるから、方程式

$$T(\delta_1,\ldots,\delta_N;U_l)-U_r=0$$

に陰関数定理を適用すれば、$\bar{U}$ を含む近傍 $Q$、および $Q\times Q$ から $R^N$ への関数

$$\hat{\delta}(U_l,U_r)=(\hat{\delta}_1(U_l,U_r),\ldots,\hat{\delta}_N(U_l,U_r))$$

を、$\hat{\delta}(U_l,U_l)=(0,\ldots,0)$、および

$$(\delta_1,\ldots,\delta_N)=\hat{\delta}(U_l,U_r)\quad\Leftrightarrow\quad T(\delta_1,\ldots,\delta_N;U_l)-U_r=0$$

を満たすように取ることができる (そのようなものが存在することが保証される)。

これにより、$U_l$ から $U_r$ までを $V_j=U_j(\delta_j;V_{j-1})$ $(j=1,\ldots,N,\ V_0=U_l,\ V_N=U_r)$ によって単純波と定数ベクトルでつなぐことができ、それによってリーマン問題 (5.2) の解を構成できる。∎

5.2 節の内容、およびこの定理の証明は、単にリーマン問題の解の存在だけではなく、このような形の解が一意的に決まることも示している。

## 5.5 オイラー座標系の理想気体の場合

オイラー座標系の理想気体に対しては、3.5 節の結果より、1-膨張波曲線 $R_1(U_0)$ は

$$U_1(\delta):\quad\begin{cases}\rho=\rho_0e^{-\delta},\\ u=u_0-\dfrac{C_0}{\theta}(e^{-\theta\delta}-1),\\ P=P_0e^{-\gamma\delta}\end{cases}\qquad(\delta\geq 0)$$

と表され $U_1'(\delta) = r_1(U_1(\delta))$ を満たし、3-膨張波曲線 $R_3(U_0)$ は

$$U_1(\delta): \quad \begin{cases} \rho = \rho_0 e^{\delta}, \\ u = u_0 + \dfrac{C_0}{\theta}(e^{\theta\delta} - 1), \qquad (\delta \geq 0) \\ P = P_0 e^{\gamma\delta} \end{cases}$$

によって $U_3'(\delta) = r_3(U_3(\delta))$ を満たす。

また、4.8 節の結果より、1-衝撃波曲線 $S_1(U_0)$ は

$$U_1(\delta): \quad \begin{cases} \rho = \rho_0 e^{-\delta}, \\ u = u_0 - C_0 f_0(e^{-\delta}), \\ P = P_0 \dfrac{(1+\theta)e^{-\delta} - \theta}{1 + \theta - \theta e^{-\delta}} \end{cases} \qquad \left(\delta \leq 0, \quad e^{-\delta} < \frac{1+\theta}{\theta}\right)$$

3-衝撃波曲線 $S_3(U_0)$ は

$$U_3(\delta): \quad \begin{cases} \rho = \rho_0 e^{\delta}, \\ u = u_0 + C_0 f_0(e^{\delta}), \\ P = P_0 \dfrac{(1+\theta)e^{\delta} - \theta}{1 + \theta - \theta e^{\delta}} \end{cases} \qquad \left(\delta \leq 0, \quad e^{\delta} > \frac{\theta}{1+\theta}\right)$$

と表されて、これらにより $R_1(U_0)$ と $S_1(U_0)$ (つまり $U_1(\delta)$ の $\delta \leq 0$ と $\delta \geq 0$), $R_3(U_0)$ と $S_3(U_0)$ (つまり $U_3(\delta)$ の $\delta \leq 0$ と $\delta \geq 0$) は $C^2$ 級でつながり、命題 5.1 を満たす。

2-接触不連続 $C_2(U_0)$ は、

$$U_2(\delta): \quad \begin{cases} \rho = \rho_0 + \delta, \\ u = u_0, \qquad (\delta > -\rho_0) \\ P = P_0 \end{cases}$$

となる。

$f_3(\xi)$, $f_4(\xi)$ を

$$f_3(\xi) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{\xi^{\theta} - 1}{\theta} & (0 < \xi \leq 1) \\ f_0(\xi) & \left(1 \leq \xi < \dfrac{1+\theta}{\theta}\right) \end{cases} \qquad \left(f_0(\xi) = \frac{\xi - 1}{\sqrt{\xi(1 + \theta - \theta\xi)}}\right)$$

$$f_4(\xi) \;=\; \begin{cases} \xi^\gamma & (0 < \xi \le 1) \\ \dfrac{(1+\theta)\xi - \theta}{1+\theta-\theta\xi} & \left(1 \le \xi < \dfrac{1+\theta}{\theta}\right) \end{cases}$$

のように定義すれば、$U_1(\delta)$ は $\delta \ge 0,\, \delta \le 0$ を込めて

$$U_1(\delta) = U_1(\delta; U_0) : \quad \begin{cases} \rho = \rho_0 \xi, \\ u = u_0 - C_0 f_3(\xi), \\ P = P_0 f_4(\xi) \end{cases} \quad \left(\xi = e^{-\delta} < \frac{1+\theta}{\theta}\right) \tag{5.3}$$

と書ける。この $R_1(U_0)$ と $S_1(U_0)$ をつないだ曲線を $T_1(U_0)$ と書くことにする。

同様に、

$$\hat{f}_3(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\xi^\theta - 1}{\theta} & (\xi \ge 1) \\ f_0(\xi) & (0 \le \xi \le 1) \end{cases} \qquad \hat{f}_4(\xi) = \begin{cases} \xi^\gamma & (\xi \ge 1) \\ \dfrac{(1+\theta)\xi - \theta}{1+\theta-\theta\xi} & \left(\dfrac{\theta}{1+\theta} < \xi \le 1\right) \end{cases}$$

とすれば、$R_3(U_0)$ と $S_3(U)$ をつないだ曲線 $T_3(U_0)$ は、

$$U_3(\delta) = U_3(\delta; U_0) : \quad \begin{cases} \rho = \rho_0 \xi, \\ u = u_0 + C_0 \hat{f}_3(\xi), \\ P = P_0 \hat{f}_4(\xi) \end{cases} \quad \left(\xi = e^{\delta} > \frac{\theta}{1+\theta}\right)$$

と表される。

リーマン問題の解は、定理 5.2 の証明のように、

$$U_m^1 = U_1(\delta_1; U_l), \quad U_m^2 = U_2(\delta_2; U_m^1), \quad U_r = U_3(\delta_3; U_m^2) \tag{5.4}$$

となる $\delta_1,\, \delta_2,\, \delta_3,\, U_m^1,\, U_m^2$ によって作られる。

これらが求まれば、例えば $\delta_1 > 0$ ならば、$U_l$ と $U_m^1$ は 1-膨張波によってつながり、その部分の解 $U = U(t,x)$ は

$$U(t,x) = \begin{cases} U_l & (x < \lambda_1(U_l)t) \\ V\left(\dfrac{x}{t}\right) & (\lambda_1(U_l)t \le x \le \lambda_1(U_m^1)t) \end{cases}$$

となるが、$V(x/t)$ は (5.3) の $\xi = e^{-\delta}$ $(0 \leq \delta \leq \delta_1)$ に、3.5 節の (3.21) を代入したものになる。

$\delta_1 < 0$ ならば、$U_l$ と $U_m^1$ は 1-衝撃波によってつながり、その部分の解 $U = U(t,x)$ は

$$U(t,x) = \begin{cases} U_l & (x < s_1 t) \\ U_m^1 & (x > s_1 t) \end{cases}$$

となるが、$s_1$ は

$$s_1 = u_0 - \sqrt{\frac{\xi}{1+\theta-\theta\xi}}$$

の $\xi = e^{-\delta}$ を代入したものになるし、あるいは直接ランキン-ユゴニオ条件より、

$$s_1 = \frac{\rho_m^1 u_m^1 - \rho_l u_l}{\rho_m^1 - \rho_l}$$

により求めることもできる。

2-単純波 (接触不連続)、3-単純波 (膨張波、または衝撃波) も同様である。

よって、$\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$, $U_m^1$, $U_m^2$ を求めることが目標となるが、例えば、(5.4) の $\rho$ 成分を見れば

$$\rho_m^1 = \rho_l e^{-\delta_1}, \quad \rho_m^2 = \rho_m^1 + \delta_2, \quad \rho_r = \rho_m^2 e^{\delta_3}$$

となるので、$\rho_m^1$, $\rho_m^2$ さえ求まれば、$\delta_1$, $\delta_2$, $\delta_3$ は

$$\delta_1 = \log\rho_l - \log\rho_m^1, \quad \delta_3 = \log\rho_r - \log\rho_m^2, \quad \delta_2 = \rho_m^2 - \rho_m^1$$

と求まるので、結局 $U_m^1$, $U_m^2$ を求めればよいことがわかる。

つまり、$U_m^1 \in T_1(U_l)$, $U_m^2 \in C_2(U_m^1)$, $U_r \in T_3(U_m^2)$ となる $U_m^1$, $U_m^2$ を求めればよいのであるが、$C_2(U_m^1)$ 上 $u$, $P$ は一定なので、

$$U_m^1 = \begin{bmatrix} \rho_m^1 \\ u_m \\ P_m \end{bmatrix}, \quad U_m^2 = \begin{bmatrix} \rho_m^2 \\ u_m \\ P_m \end{bmatrix}$$

と書ける。

今、$V = U_3(\delta; W)$ を逆に $W$ について解いたものを

$$\hat{T}_3(V) : W = \hat{U}_3(\delta; V)$$

と書くことにする。つまり、左の状態につながりうる右の状態が相空間上で動く曲線を考える代わりに、右の状態につながりうる左の状態が相空間上で動く曲線を考える。$\hat{R}_3$, $\hat{S}_3$ も同様に定義することにする。

そうすれば、

$$U_m^1 = \begin{bmatrix} \rho_m^1 \\ u_m \\ P_m \end{bmatrix} = U_1(\delta_1; U_l)\ (T_1(U_l)), \quad U_m^2 = \begin{bmatrix} \rho_m^2 \\ u_m \\ P_m \end{bmatrix} = \hat{U}_3(\delta_3; U_r)\ (\hat{T}_3(U_r))$$

であるから、よって、

- 曲線 $T_1(U_l)$ と $\hat{T}_3(U_r)$ を $(u, P)$ 平面へ射影した曲線 $pT_1(U_l)$ と $p\hat{T}_3(U_r)$ を作り、
- その $(u, P)$ 平面での交点を $(u_m, P_m)$ とし、
- その $T_1(U_l)$, $\hat{T}_3(U_r)$ での $\rho$ の値を $\rho_m^1$, $\rho_m^2$

とすれば、$U_m^1$, $U_m^2$ が求まることになる。

これを行うために、まず $\hat{T}_3(U_r)$ $(\hat{U}_3(\delta; U_r))$ を式で表わしてみる。

$\delta \geq 0$ の場合、$U_r = U_3(\delta; U_l)$ は

$$\rho_r = \rho_l \xi, \quad u_r = u_l + \frac{C_l}{\theta}(\xi^\theta - 1), \quad P_r = P_l \xi^\gamma \quad (\xi = e^\delta)$$

であり、

$$C_r = \sqrt{\frac{\gamma P_r}{\rho_r}} = \sqrt{\frac{\gamma P_l}{\rho_l}} \xi^\theta = C_l \xi^\theta$$

より、$\hat{\xi} = 1/\xi$ とすれば、

$$
\begin{aligned}
\rho_l &= \rho_r \hat{\xi}, \\
u_l &= u_r - \frac{C_l}{\theta}(\xi^\theta - 1) = u_r - \frac{C_r}{\theta}\hat{\xi}^\theta(\xi^\theta - 1) = u_r + \frac{C_r}{\theta}(\hat{\xi}^\theta - 1), \\
P_l &= P_r \hat{\xi}^\gamma \\
&(\hat{\xi} = e^{-\delta} \leq 1)
\end{aligned}
$$

となる。$\delta < 0$ の場合は、

$$
\rho_r = \rho_l \xi, \quad u_r = u_l + C_l f_0(\xi) = u_l + C_l \frac{\xi - 1}{\sqrt{\xi(1 + \theta - \theta\xi)}}, \quad P_r = P_l \frac{(1+\theta)\xi - \theta}{1 + \theta - \theta\xi}
$$

なので、

$$
C_r = \sqrt{\frac{\gamma P_l}{\rho_l}} \sqrt{\frac{1}{\xi} \frac{(1+\theta)\xi - \theta}{1 + \theta - \theta\xi}} = C_l \sqrt{\frac{1}{\xi} \frac{(1+\theta)\xi - \theta}{1 + \theta - \theta\xi}}
$$

であり、よって、

$$
\begin{aligned}
C_l f_0(\xi) &= C_r \sqrt{\xi \frac{1 + \theta - \theta\xi}{(1+\theta)\xi - \theta}} \frac{\xi - 1}{\sqrt{\xi(1 + \theta - \theta\xi)}} = C_r \frac{\xi - 1}{\sqrt{(1+\theta)\xi - \theta}} \\
&= C_r \frac{1 - \hat{\xi}}{\sqrt{\hat{\xi}(1 + \theta - \theta\hat{\xi})}} = -C_r f_0(\hat{\xi}),
\end{aligned}
$$

となる。また、

$$
\frac{(1+\theta)\xi - \theta}{1 + \theta - \theta\xi} = \frac{1 + \theta - \theta\hat{\xi}}{(1+\theta)\hat{\xi} - \theta}
$$

となるので、

$$
\rho_l = \rho_r \hat{\xi}, \quad u_l = u_r + C_r f_0(\hat{\xi}), \quad P_l = P_r \frac{(1+\theta)\hat{\xi} - \theta}{1 + \theta - \theta\hat{\xi}} \quad \left(1 \leq \hat{\xi} = e^{-\delta} < \frac{1+\theta}{\theta}\right)
$$

と書ける。

以上をまとめると、$e^{-\delta}$ をあらためて $\xi$ と書き直せば、

$$\rho_l = \rho_r\xi, \quad u_l = u_r + C_r f_3(\xi), \quad P_l = P_r f_4(\xi) \quad \left(\xi = e^{-\delta} < \frac{1+\theta}{\theta}\right)$$

と書けることになる。これが、$U_l = \hat{U}_3(\delta; U_r)$ ($\hat{T}_3(U_r)$) を与える。この $\hat{T}_3(U_0)$ と $T_1(U_0)$ を比較すると、平面 $u = u_0$ に関して対称であることがわかる。

$(u_m, P_m)$ を求めるには、$(u, P)$ 平面への $T_1(U_l)$ と $\hat{T}_3(U_r)$ の射影曲線

$$\begin{cases} pT_1(U_l): & (u, P) = (u_l - C_l f_3(\xi), P_l f_4(\xi)) \\ p\hat{T}_3(U_r): & (u, P) = (u_r + C_r f_3(\xi), P_r f_4(\xi)) \end{cases} \quad \left(\xi = e^{-\delta} < \frac{1+\theta}{\theta}\right)$$

の交点を求めればよいが、次にこれがちゃんと求まるかどうか考えてみる。

$\tau = f_4(\xi)$ とすると、$\tau$ は $\xi$ に関して単調で、$0 < \xi \leq 1$ のとき $0 < \tau \leq 1$, $1 < \xi < (1+\theta)/\theta$ のとき $1 < \tau < \infty$ なので、$f_3(\xi)$ を $\tau$ の関数

$$f_3(\xi) = \bar{f}_3(\tau) \quad (0 < \tau < \infty)$$

と見て考えればよい。このとき、

$$pT_1(U_l): \ u = u_l - C_l \bar{f}_3(P/P_l), \quad p\hat{T}_3(U_r): \ u = u_r + C_r \bar{f}_3(P/P_r)$$

となり、いずれもこの関数をスケール変換、平行移動、上下反転したものなので、この関数を調べれば可解性がわかる。

まず $\tau \leq 1$、すなわち $\delta \geq 0$ のときは、$\tau = \xi^\gamma$ より

$$\bar{f}_3(\tau) = \frac{\xi^\theta - 1}{\theta} = \frac{1}{\theta}(\tau^{\theta/\gamma} - 1) < 0$$

なので、単調増加で、$y = \bar{f}_3(\tau)$ のグラフは上に凸で $(\tau, y) = (0, -1/\theta)$ で $y$ 軸に接し、$(\tau, y) = (1, 0)$ を通る。

$\tau \geq 1$ のときは、$\tau = f_4(\xi) = \{(1+\theta)\xi - \theta\}/(1 + \theta - \theta\xi)$ より、

$$\xi = \frac{(1+\theta)\tau + \theta}{1 + \theta + \theta\tau}$$

となるので、よって

$$y = \bar{f}_3(\tau) = \frac{\tau - 1}{\sqrt{\gamma}\sqrt{(1+\theta)\tau + \theta}}$$

と書け、

$$\begin{aligned} \bar{f}_3'(\tau) &= \bar{f}_3(\tau)\frac{(1+\theta)\tau + 3\theta + 1}{2(\tau - 1)\{(1+\theta)\tau + \theta\}} > 0, \\ \bar{f}_3''(\tau) &= \bar{f}_3(\tau)\frac{-(1+\theta)\{(1+\theta)\tau + 7\theta + 3\}}{4(\tau - 1)\{(1+\theta)\tau + \theta\}^2} < 0 \end{aligned}$$

のようになることが示される。また、これらの式より

$$\lim_{\tau\to\infty} \bar{f}_3(\tau) = \infty, \quad \lim_{\tau\to\infty} \bar{f}_3'(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \bar{f}_3''(\tau) = 0$$

となることがわかる (図 5.6)。よって、$pT_1(U_l)$ は $P = 0$ のとき $u = u_l + C_l/\theta$, $p\hat{T}_3(U_r)$

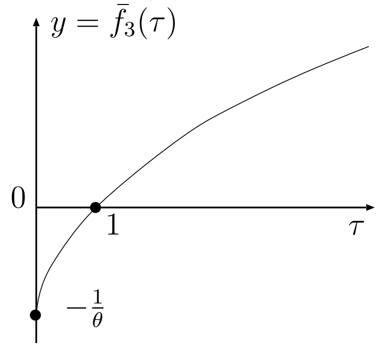



図 5.6: $y = \bar{f}_3(\tau)$ のグラフ

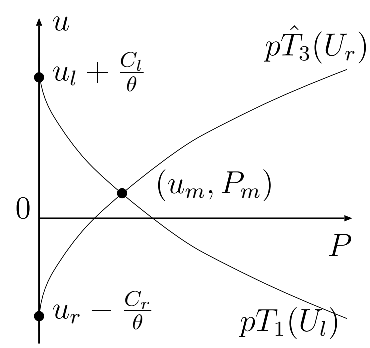



図 5.7: $pT_1(U_l)$ と $p\hat{T}_3(U_r)$

は $P = 0$ のとき $u = u_r - C_r/\theta$ で $u$ 軸に接するから、

$$u_l + \frac{C_l}{\theta} > u_r - \frac{C_r}{\theta} \tag{5.5}$$

ならば、$pT_1(U_l)$ と $p\hat{T}_3(U_r)$ は $P > 0$ の領域内で必ず一点 $(u_m, P_m)$ で交わり、よってリーマン問題が解けることになる (図 5.7)。

逆に、(5.5) が満たされない場合は、$P > 0$ の領域では 2 つの曲線 $pT_1(U_l)$, $p\hat{T}_3(U_r)$ は交わらず、よって今までの考察のような形ではリーマン問題の解を求めることはでき

ない。なお、この場合は $x=0$ の両側にある気体の状態 $U_l, U_r$ が強く互いに遠ざかろうとしていることを意味していて、その場合は中間に $P=0, \rho=0$ の状態、すなわち「真空」が発生する。真空状態をも解と見なして考える立場もあるが、通常のリーマン問題の一般論の考察からは外れてしまうので、ここではそのような話には立ち入らないことにする。

## 5.6 ラグランジュ座標系の理想気体の場合

ラグランジュ座標系の理想気体の場合は、3.6 節、4.9 節で見たように、$R_j(\tilde{U}_0)$, $S_j(\tilde{U}_0)$ $(j=1,3)$, および $C_2(\tilde{U}_0)$ は以下の通り。

$$R_1(\tilde{U}_0):\ \begin{cases} \tilde{v} &= \tilde{v}_0 e^{\delta} \\ \tilde{u} &= \tilde{u}_0 - \dfrac{\tilde{C}_0}{\theta}(e^{-\theta\delta}-1) \\ \tilde{P} &= \tilde{P}_0 e^{-\gamma\delta} \end{cases} \quad (\delta \geq 0)$$

$$R_3(\tilde{U}_0):\ \begin{cases} \tilde{v} &= \tilde{v}_0 e^{-\delta} \\ \tilde{u} &= \tilde{u}_0 + \dfrac{\tilde{C}_0}{\theta}(e^{\theta\delta}-1) \\ \tilde{P} &= \tilde{P}_0 e^{\gamma\delta} \end{cases} \quad (\delta \geq 0)$$

$$S_1(\tilde{U}_0):\ \begin{cases} \tilde{v} &= \tilde{v}_0 e^{\delta} \\ \tilde{u} &= \tilde{u}_0 - \tilde{C}_0 f_0(e^{-\delta}) \\ \tilde{P} &= \tilde{P}_0 \dfrac{(1+\theta)e^{-\delta}-\theta}{1+\theta-\theta e^{-\delta}} \end{cases} \quad \left(\delta \leq 0,\ e^{-\delta} < \frac{1+\theta}{\theta}\right)$$

$$S_3(\tilde{U}_0):\ \begin{cases} \tilde{v} &= \tilde{v}_0 e^{-\delta} \\ \tilde{u} &= \tilde{u}_0 + \tilde{C}_0 f_0(e^{\delta}) \\ \tilde{P} &= \tilde{P}_0 \dfrac{(1+\theta)e^{\delta}-\theta}{1+\theta-\theta e^{\delta}} \end{cases} \quad \left(\delta \leq 0,\ e^{-\delta} > \frac{\theta}{1+\theta}\right)$$

$$C_2(\tilde{U}_0):\ \begin{cases} \tilde{v} &= \tilde{v}_0 + \delta \\ \tilde{u} &= \tilde{u}_0 \\ \tilde{P} &= \tilde{P}_0 \end{cases} \quad (\delta > -\tilde{v}_0)$$

よって、$T_1(\tilde{U}_0)$, $T_3(\tilde{U}_0)$ は

$$
T_1(\tilde{U}_0):\ \begin{cases} \tilde{v} &= \tilde{v}_0\xi^{-1} \\ \tilde{u} &= \tilde{u}_0 - \tilde{C}_0 f_3(\xi) \\ \tilde{P} &= \tilde{P}_0 f_4(\xi) \end{cases} \quad \left(\xi = e^{-\delta} < \frac{1+\theta}{\theta}\right)
$$
$$
T_3(\tilde{U}_0):\ \begin{cases} \tilde{v} &= \tilde{v}_0\xi^{-1} \\ \tilde{u} &= \tilde{u}_0 + \tilde{C}_0 \tilde{f}_3(\xi) \\ \tilde{P} &= \tilde{P}_0 \tilde{f}_4(\xi) \end{cases} \quad \left(\xi = e^{\delta} > \frac{\theta}{1+\theta}\right)
$$

$\hat{T}_3(\tilde{U}_0)$ は、

$$
\hat{T}_3(\tilde{U}_0):\ \begin{cases} \tilde{v} &= \tilde{v}_0\xi^{-1} \\ \tilde{u} &= \tilde{u}_0 + \tilde{C}_0 f_3(\xi) \\ \tilde{P} &= \tilde{P}_0 f_4(\xi) \end{cases} \quad \left(\xi = e^{-\delta} < \frac{1+\theta}{\theta}\right)
$$

となる。$\tilde{\rho} = \tilde{v}^{-1}$ であるから、見てわかる通りこれらの曲線はオイラー座標系の場合と全く同一である。よって、リーマン問題の解法もオイラー座標系の場合と同じになる。

## 5.7 バロトロピックのオイラー座標系の場合

バロトロピックのオイラー座標系の場合、3.7 節、4.10 節で見たように $R_j(U_0)$, $S_j(U_0)$ $(j = 1, 2)$ は以下のように表される。

$$
\begin{aligned}
R_1(U_0):&\quad u = u_0 - \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi && (\rho = \rho_0 e^{-\delta},\ \delta \geq 0) \\
R_2(U_0):&\quad u = u_0 + \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi && (\rho = \rho_0 e^{\delta},\ \delta \geq 0) \\
S_1(U_0):&\quad u = u_0 - (\rho - \rho_0) f_1(\rho; \rho_0) && (\rho = \rho_0 e^{-\delta},\ \delta \leq 0) \\
S_2(U_0):&\quad u = u_0 + (\rho - \rho_0) f_1(\rho; \rho_0) && (\rho = \rho_0 e^{\delta},\ \delta \leq 0)
\end{aligned}
$$
$$
\left( f_1(\rho; \rho_0) = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \rho}} \sqrt{\frac{P(\rho) - P(\rho_0)}{\rho - \rho_0}} \right)
$$

よって、

$$
\begin{aligned}
f_5(\rho;\rho_0) &= \begin{cases} \displaystyle\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi & (\rho \leq \rho_0) \\ (\rho-\rho_0) f_1(\rho;\rho_0) & (\rho \geq \rho_0) \end{cases} \\
\hat{f}_5(\rho;\rho_0) &= \begin{cases} \displaystyle\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi & (\rho \geq \rho_0) \\ (\rho-\rho_0) f_1(\rho;\rho_0) & (\rho \leq \rho_0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

とすれば、$R_j$, $S_j$ をつないだ $T_j$ は

$$
\begin{aligned}
&T_1(U_0): \quad u = u_0 - f_5(\rho;\rho_0) \quad (\rho = \rho_0 e^{-\delta}) \\
&T_2(U_0): \quad u = u_0 + \hat{f}_5(\rho;\rho_0) \quad (\rho = \rho_0 e^{\delta})
\end{aligned}
$$

となる。この場合、

$$
\hat{f}_5(\rho_1;\rho_0) = -f_t(\rho_0;\rho_1)
$$

であるので、$T_2(U_0) \ni U_1$ を逆に $U_0$ について解いた $\hat{T}_2(U_1) \ni U_0$ を考えると、

$$
\hat{T}_2(U_0): \quad u = u_0 + f_5(\rho;\rho_0) \quad (\rho = \rho_0 e^{-\delta})
$$

となることがわかる。

リーマン問題の解は、$T_1(U_l) \ni U_m$, $T_2(U_m) \ni U_r$ となる $U_m = {}^T(\rho_m, u_m)$ を求めればよいが、それは $T_1(U_l)$ と $\hat{T}_2(U_r)$ の交点として $U_m$ を求めればよいことになる。それにより、$U_l$ と $U_m$ を結ぶ 1-単純波、$U_m$ と $U_r$ を結ぶ 2-単純波によってリーマン問題の解が構成される。

これが常に解けるかどうかを考えてみる。

$f_5(\rho;\rho_0)$ は、$\rho < \rho_0$ ならば $f_5' = \sqrt{P'}/\rho > 0$ であり、$\rho > \rho_0$ ならば

$$
(f_5)^2 = (\rho-\rho_0)^2 (f_1(\rho;\rho_0))^2 = \frac{\{P(\rho)-P(\rho_0)\}(\rho-\rho_0)}{\rho_0\rho} = (P-P_0)\left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{1}{\rho}\right)
$$

であり、$P-P_0$, $1/\rho_0 - 1/\rho$ は $\rho > \rho_0$ ではいずれも正で、かつ増加関数なので $f_5$ $(>0)$ も増加関数となる。

よって、$f_5$ はすべての $\rho > 0$ に対して増加関数であり、

$$\begin{aligned}\lim_{\rho\to\infty} f_5(\rho;\rho_0) &= f_5(\infty;\rho_0) = \sqrt{(P_\infty - P_0)\frac{1}{\rho_0}} \quad (P_\infty = \lim_{\rho\to\infty} P(\rho)) \\ \lim_{\rho\to+0} f_5(\rho;\rho_0) &= -\int_0^{\rho_0} \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} d\rho\end{aligned}$$

となるので、交点を求める方程式

$$u_l - f_5(\rho;\rho_l) = u_r + f_5(\rho;\rho_r)$$

を

$$f_5(\rho;\rho_l) + f_5(\rho;\rho_r) = u_l - u_r$$

と書き直せば、この左辺は $\rho$ の増加関数で、$\rho \to +0$ のときは

$$-\left(\int_0^{\rho_l} + \int_0^{\rho_r}\right) \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} d\rho \ (= \alpha)$$

となり、$\rho \to \infty$ のときは

$$\sqrt{\frac{P_\infty - P_l}{\rho_l}} + \sqrt{\frac{P_\infty - P_r}{\rho_r}} \ (= \beta)$$

となるので、解が $\rho > 0$ で求まるためには

$$\alpha < u_l - u_r < \beta \tag{5.6}$$

であることが条件となる。

例えば $P = A\rho$ のときは $P_\infty = \infty$,

$$\int_0^{\rho_0} \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} d\rho = \left[\sqrt{A}\log\rho\right]_0^{\rho_0} = \infty$$

なので、この条件 (5.6) は常に満たされ、よってどんな $U_l, U_r$ に対しても解が求まる。一方 $P = A\rho^\gamma$ $(1 < \gamma < 3)$ の場合は、$P_\infty = \infty$ であるが、

$$\int_0^{\rho_0} \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} d\rho = \left[\frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho^\theta\right]_0^{\rho_0} = \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho_0^\theta < \infty$$

なので、(5.6) は

$$u_l + \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho_l^\theta > u_r - \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta}\rho_r^\theta \tag{5.7}$$

となり、これが満たされるときのみ解を持つことになる。

## 5.8 リーマン不変量による座標系

5.7 節でも考察したバロトロピックの方程式の場合は、相空間の座標は本来は $(\rho, m) = (\rho, \rho u)$ であるが今までは $(\rho, u)$ で考察してきた。この 2 本の方程式系の場合には、他にもリーマン不変量を相空間の座標系として取ると都合がよいことが知られている。

リーマン不変量は、3.4 節で見たように各特性方向に $(N-1)$ 個存在するので、$N = 2$ の場合は 1-リーマン不変量が 1 つ、2-リーマン不変量が 1 つあるだけである。これらをそれぞれ $w_1 = w_1(U)$, $w_2 = w_2(U$ とすると、

$$\nabla_U w_1(U) r_1(U) = 0, \quad \nabla_U w_2(U) r_2(U) = 0$$

であるから、補題 4.1 より

$$\nabla_U w_1 \in \langle r_1\rangle^\perp = \langle l_2\rangle, \quad \nabla_U w_2 \in \langle r_2\rangle^\perp = \langle l_1\rangle$$

つまり、$\nabla_U w_j$ は $l_{\hat{j}}$ ($\hat{j}$ は $j = 1$ のとき $\hat{j} = 2$, $j = 2$ のとき $\hat{j} = 1$ であるとする) に平行であることになるので、$\nabla_U w_1$ と $\nabla_U w_2$ は一次独立であることがわかる。よって、$U$ と $(w_1, w_2)$ は 1 対 1 に対応し、$U$ の代わりに $(w_1, w_2)$ を相空間の座標系として取ることができる。

例えばバロトロピックのオイラー座標系の場合は、

$$w_1 = u + C, \quad w_2 = u - C, \quad \left(C = \int_a^\rho \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi\right)$$

であり、よって、$u=(w_1+w_2)/2$, $C=(w_1-w_2)/2$ となり、また $C$ と $\rho$ は一対一に対応するので、確かに $(\rho,u)$ と $(w_1,w_2)$ は一対一に対応する。

$\nabla_U w_j(U) \mathbin{/\!/} l_{\hat{j}}(U)$ なので、$U$ が滑らかならば、方程式

$$U_t+F(U)_x=U_t+\nabla_U F(U)U_x=0$$

に左から $\nabla_U w_j(U)$ をかけると、

$$\nabla_U w_j(U)U_t+\lambda_{\hat{j}}(U)\nabla_U w_j(U)U_x=0$$

となり、よって、

$$(w_j)_t+\lambda_{\hat{j}}(w_j)_x=0 \quad (j=1,2)$$

となる。これは、方程式を対角化して

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}_t+\begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}_x=0$$

としたことにもなっている。

さて、相空間を $(w_1,w_2)$ を座標系として見るとすると、$w_j$ は $r_j(U)$ の積分曲線上一定なので、相空間上の膨張波曲線 $R_j(U)$ と接触不連続曲線 $C_j(U)$ はこの空間 (平面) 上では $w_j$ 軸に垂直 ($w_{\hat{j}}$ 軸に平行) な半直線、または直線となって見やすくなる。しかも、必要なら $w_{\hat{j}}$ を $(-1)$ 倍しておいて、

$$\nabla_U w_{\hat{j}}\cdot r_j>0 \tag{5.8}$$

となるようにしておけば、$R_j(U)$ は

$$U'(\delta)=r_j(U(\delta))$$

の $\delta\geq 0$ の方向に伸びるから、この $R_j$ に沿って

$$\frac{dw_{\hat{j}}}{d\delta}=(\nabla_U w_{\hat{j}}\cdot r_j)(U(\delta))>0$$

となるので、結局、$R_j$ は $w_{\hat{j}}$ 軸に平行で、$w_{\hat{j}}$ の増える方向に伸びる半直線であることになる。つまり、(5.8) の条件の元で、

$$\begin{aligned} R_1(U_0) &= \{(w_1, w_2);\ w_1 = w_1(U_0),\ w_2 \geq w_2(U_0)\}, \\ R_2(U_0) &= \{(w_1, w_2);\ w_2 = w_2(U_0),\ w_1 \geq w_1(U_0)\} \end{aligned} \tag{5.9}$$

であることになる (1,2-方向が真性非線形の場合)。

バロトロピックのオイラー座標系の方程式の場合は、

$$\begin{aligned} \nabla_U w_1 \cdot r_2 &= (C_\rho, 1)\begin{bmatrix} \rho \\ \sqrt{P'} \end{bmatrix} = 2\sqrt{P'} > 0, \\ \nabla_U w_2 \cdot r_1 &= (-C_\rho, 1)\begin{bmatrix} -\rho \\ \sqrt{P'} \end{bmatrix} = 2\sqrt{P'} > 0, \end{aligned}$$

となって (5.8) を満たしているので、膨張波曲線 $R_j(U)$ は (5.9) の半直線で与えられる (図 5.8)。

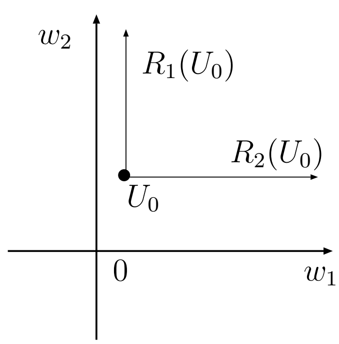



図 5.8: $(w_1, w_2)$ 平面での膨張波曲線

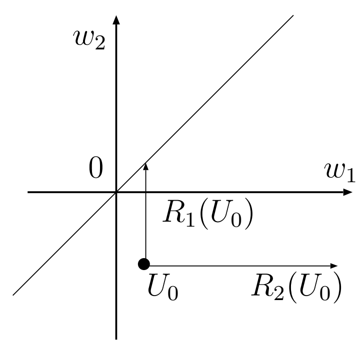



図 5.9: $\rho \to +0$ で $C$ が有限の場合

ただし、この場合、積分

$$f_6(\rho; a) = \int_a^\rho \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi \quad (= C + \text{定数})$$

の $\rho \to +0$, $\rho \to \infty$ での収束、発散によって、相空間 $\Omega$ が平面全体になるかどうかは変わってくる。例えば、$P = A\rho$ のように

$$\lim_{\rho \to +0} f_6(\rho; a) = -\infty, \quad \lim_{\rho \to \infty} f_6(\rho; a) = \infty$$

の場合は $(w_1, w_2)$ 平面全体が $\Omega$ となるが、$P = A\rho^\gamma$ $(1 < \gamma < 3)$ のように

$$\lim_{\rho\to+0} f_6(\rho; a) > -\infty, \quad \lim_{\rho\to\infty} f_6(\rho; a) = \infty$$

の場合は半平面となり、この場合は $C = f_6(\rho; +0)$ と定義すれば、$C = 0$、すなわち $\rho = 0$ が $w_1 = w_2$ に対応し、$C > 0$ は $w_1 > w_2$ となるので、$\Omega$ は $w_1 > w_2$ の半平面となる (図 5.9)。よってこの場合は $R_1(U_0)$ (および $\hat{R}_2(U_0)$) は半直線ではなく、有限な線分となる。

さらに

$$\lim_{\rho\to+0} f_6(\rho; a) > -\infty, \quad \lim_{\rho\to\infty} f_6(\rho; a) < \infty$$

である場合は、やはり $C = f_6(\rho; +0)$ とすれば、

$$0 < w_1 - w_2 < 2 \lim_{\rho\to\infty} f_6(\rho; +0) \left( = 2\int_0^\infty \frac{\sqrt{P'(\rho)}}{\rho} d\rho \right)$$

の帯状領域内が $\Omega$ となる。この場合は $R_1(U_0)$ も $R_2(U_0)$ も ($\hat{R}_2(U_0)$ も) 線分となる。

次は、バロトロピックのオイラー座標系の場合の、$(w_1, w_2)$ 平面での衝撃波曲線 $S_j(U_0)$ (および $\hat{S}_2(U_0)$) を考えてみる。

これらは、5.7 節で見たように、

$$\begin{aligned}
S_1(U_0) &: \quad u = u_0 - (\rho - \rho_0) f_1(\rho; \rho_0) \quad (\rho \geq \rho_0) \\
S_2(U_0) &: \quad u = u_0 + (\rho - \rho_0) f_1(\rho; \rho_0) \quad (\rho \leq \rho_0) \\
\hat{S}_2(U_0) &: \quad u = u_0 + (\rho - \rho_0) f_1(\rho; \rho_0) \quad (\rho \geq \rho_0)
\end{aligned}$$

であるので、$\hat{S}_2(U_0)$ は $S_1(U_0)$ と $u = u_0$ ($(w_1, w_2)$ 平面では $w_1 + w_2 = 2u_0$) に関して対称となる。

$S_1(U_0)$ は、$(w_1, w_2)$ 平面では $\rho$ をパラメータとして

$$\begin{cases} w_1 = u_0 - (\rho - \rho_0) f_1(\rho; \rho_0) + C, \\ w_2 = u_0 - (\rho - \rho_0) f_1(\rho; \rho_0) - C \end{cases} \quad (\rho \geq \rho_0)$$

と書ける。今、

$$f_1=\sqrt{\frac{f_7}{\rho_0\rho}},\quad f_7=\frac{P-P_0}{\rho-\rho_0}\quad (P_0=P(\rho_0))$$

とすれば、簡単な計算により、

$$\begin{aligned}
\frac{dw_1}{d\rho} &= -((\rho-\rho_0)f_1)'+\frac{\sqrt{P'}}{\rho}\\
&= -\frac{1}{2\rho}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\sqrt{f_7}-\frac{1}{2\sqrt{\rho_0\rho}}\frac{P'}{\sqrt{f_7}}+\frac{\sqrt{P'}}{\rho}\\
&= -\frac{1}{2\sqrt{\rho_0\rho}}\frac{P'}{\sqrt{f_7}}\left(1-\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\sqrt{\frac{f_7}{P'}}\right)^2,\\
\frac{dw_2}{d\rho} &= -((\rho-\rho_0)f_1)'-\frac{\sqrt{P'}}{\rho}\\
&= -\frac{1}{2\sqrt{\rho_0\rho}}\frac{P'}{\sqrt{f_7}}\left(1+\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\sqrt{\frac{f_7}{P'}}\right)^2
\end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{dw_1}{dw_2}=\left(\frac{1-B_1}{1+B_1}\right)^2,\quad B_1=\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\sqrt{\frac{f_7}{P'}}$$

となる。よって、$0\le dw_1/dw_2\le 1$ がわかる。また、$\rho\to\rho_0+0$ のとき、$f_7\to P_0'=P'(\rho_0)$ なので、このとき $dw_1/dw_2\to 0$ となることもわかる。

同様に、$S_2(U_0)$ の場合は、

$$\begin{cases} w_1=u_0+(\rho-\rho_0)f_1(\rho;\rho_0)+C, \\ w_2=u_0+(\rho-\rho_0)f_1(\rho;\rho_0)-C \end{cases}\qquad (\rho\le\rho_0)$$

であるので、

$$\frac{dw_1}{d\rho} = \frac{1}{2\rho}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\sqrt{f_7}+\frac{1}{2\sqrt{\rho_0\rho}}\frac{P'}{\sqrt{f_7}}+\frac{\sqrt{P'}}{\rho}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\sqrt{\rho_0\rho}}\frac{P'}{\sqrt{f_7}}\left(1+\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\sqrt{\frac{f_7}{P'}}\right)^2, \\
\frac{dw_2}{d\rho} &= \frac{1}{2\sqrt{\rho_0\rho}}\frac{P'}{\sqrt{f_7}}\left(1-\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}\sqrt{\frac{f_7}{P'}}\right)^2
\end{aligned}
$$

より、

$$
\frac{dw_2}{dw_1} = \left(\frac{1-B_1}{1+B_1}\right)^2, \quad 0 \le \frac{dw_2}{dw_1} \le 1, \quad \lim_{\rho\to\rho_0-0}\frac{dw_2}{dw_1} = 0
$$

であることがわかる。これにより、$(w_1, w_2)$ 平面での $R_j$, $S_j$ は図 5.10 のようになり、$\hat{R}_2$, $\hat{S}_2$ は図 5.11 のようになる。この $R_1(U_l)$ と $S_1(U_l)$ をつなげた $T_1(U_l)$ 曲線と、

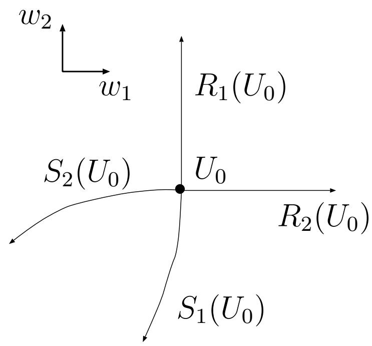



図 5.10: $(w_1, w_2)$ 平面での $R_j$, $S_j$

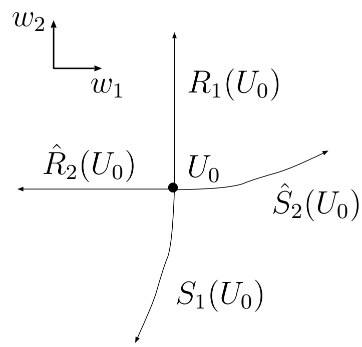



図 5.11: $R_1$, $S_1$ と $\hat{R}_2$, $\hat{S}_2$

$\hat{R}_2(U_r)$ と $\hat{S}_2(U_r)$ をつなげた $\hat{T}_2(U_r)$ 曲線の交点が中間状態 $U_m$ になり、それによりリーマン問題の解が得られることになる。

この場合、そのリーマン問題の解に表われる波は、$U_l$, $U_r$ の位置関係により変わるが、図 5.12 のように $U_l$ を中心に $R_j(U_l)$, $S_j(U_l)$ を書いたときにそれらにより分割される 4 つの領域のどこに $U_r$ があるかによってその波の表われ方が決まる。

$U_r$ が図 5.12 の領域 I に入る場合は、1-膨張波曲線 $(R_1(U_l))$ と 2-膨張波曲線 $(R_2(U_m))$ によって $U_l$ と $U_r$ がつながるので、$U_l$ と $U_m$ をつなぐ 1-膨張波、$U_m$ と $U_r$ をつなぐ 2-膨張波によってリーマン問題の解が構成される (図 5.13)。この $U_m$ は $R_1(U_l)$ と $\hat{R}_2(U_r)$ の交点と見ることもできる。

$U_r$ が図 5.12 の領域 II に入るときは、$S_1(U_l)$ と $\hat{R}_2(U_r)$ が ($U_m$ で) 交わるので、$S_1(U_l)$ と $R_2(U_m)$ により $U_l$ と $U_r$ がつながる。よって、$U_l$ と $U_m$ は 1-衝撃波、$U_m$ と $U_r$ は 2-膨張波でつながり、それがリーマン問題の解となる (図 5.14)。

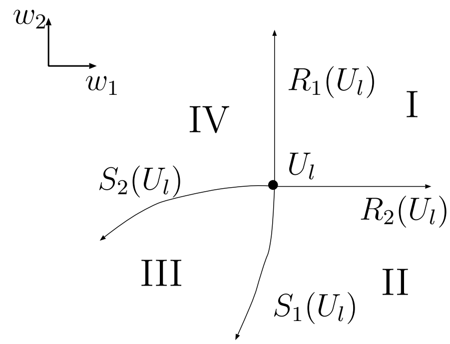



図 5.12: $U_l$ を中心とする $R_j$, $S_j$ による領域分割

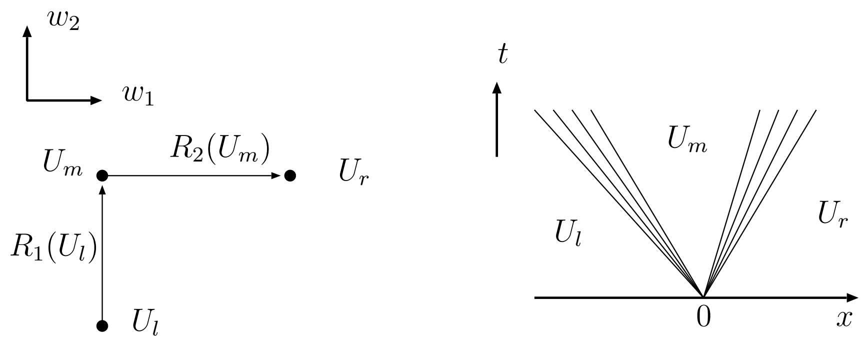



図 5.13: $U_r$ が領域 I に入る場合 (左は $(w_1, w_2)$ 相平面、右は $(t, x)$ 平面)

$U_r$ が図 5.12 の領域 III に入るときは、$S_1(U_l)$ と $\hat{S}_2(U_r)$ が交わるので、1-衝撃波と 2-膨張波でリーマン問題の解が作られる (図 5.15)。

$U_r$ が図 5.12 の領域 IV に入るときは、$R_1(U_l)$ と $\hat{S}_2(U_r)$ が交わるので、1-衝撃波と 2-膨張波が現われることになる (図 5.16)。

なお、$P = A\rho^\gamma$ $(1 < \gamma < 3)$ のように、$\Omega$ が平面全体でない場合 (図 5.9 参照) は、図 5.17 のように $R_1(U_l)$ は有限のところで $\Omega$ の境界にぶつかるので、V の領域に $U_r$ が入る場合、すなわち

$$w_1(U_l) = u_l + \int_0^{\rho_l} \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi \le w_2(U_r) = u_r - \int_0^{\rho_r} \frac{\sqrt{P'(\xi)}}{\xi} d\xi$$

である場合 ($P = A\rho^\gamma$ の場合は丁度 (5.7) でない場合に対応) は、$R_1(U_l)$ と $\hat{R}_2(U_r)$ は $\Omega$ ではぶつからないので $\rho > 0$ の範囲では解は求まらないことになる。

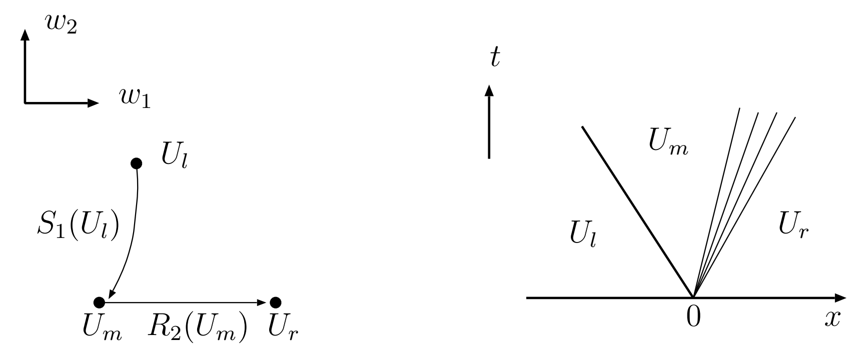



図 5.14: $U_r$ が領域 II に入る場合

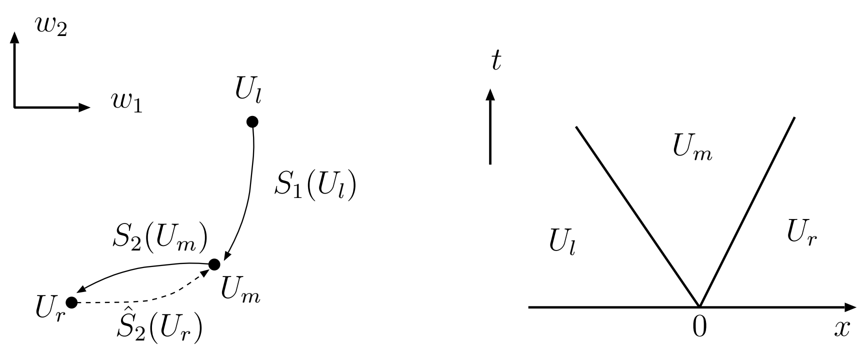



図 5.15: $U_r$ が領域 III に入る場合

## 5.9 バロトロピックのラグランジュ座標系の場合

バロトロピックのラグランジュ座標系の場合は、3.8 節、4.11 節より $R_j(\tilde{U}_0)$, $S_j(\tilde{U}_0)$ $(j = 1, 2)$ は以下の通り。

$$
\begin{aligned}
R_1(\tilde{U}_0) :&\quad \tilde{u} = \tilde{u}_0 + \int_{\tilde{v}_0}^{\tilde{v}} \sqrt{-\tilde{P}'(\xi)}d\xi && (\tilde{v} = \tilde{v}_0 + \delta\ \delta \geq 0) \\
R_2(\tilde{U}_0) :&\quad \tilde{u} = \tilde{u}_0 - \int_{\tilde{v}_0}^{\tilde{v}} \sqrt{-\tilde{P}'(\xi)}d\xi && (\tilde{v} = \tilde{v}_0 - \delta\ \delta \geq 0) \\
S_1(\tilde{U}_0) :&\quad \tilde{u} = \tilde{u}_0 + (\tilde{v} - \tilde{v}_0) f_2(\tilde{v}; \tilde{v}_0) && (\tilde{v} = \tilde{v}_0 + \delta\ \delta \leq 0) \\
S_2(\tilde{U}_0) :&\quad \tilde{u} = \tilde{u}_0 - (\tilde{v} - \tilde{v}_0) f_2(\tilde{v}; \tilde{v}_0) && (\tilde{v} = \tilde{v}_0 - \delta\ \delta \leq 0) \\
&\left( f_2(\rho; \rho_0) = \sqrt{-\frac{\tilde{P}(\tilde{v}) - \tilde{P}(\tilde{v}_0)}{\tilde{v} - \tilde{v}_0}} \right)
\end{aligned}
$$

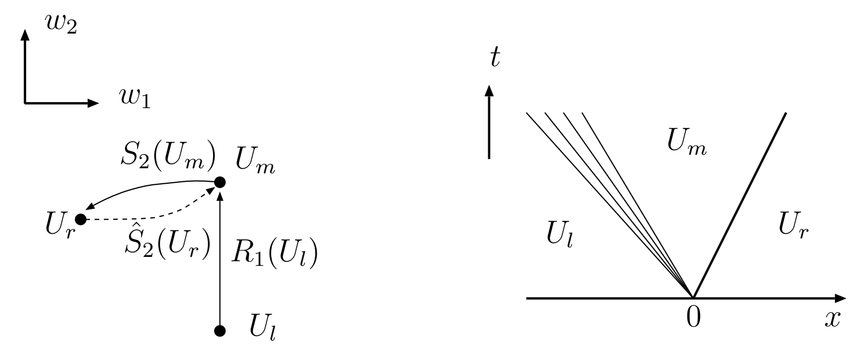



図 5.16: $U_r$ が領域 IV に入る場合

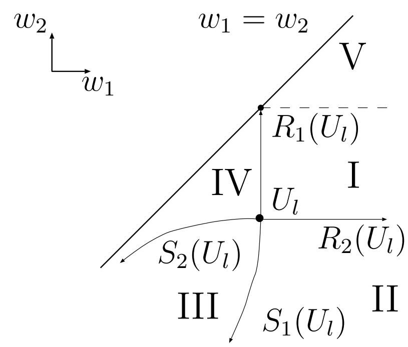



図 5.17: $\Omega$ が $(w_1, w_2)$ の半平面である場合

また、$\hat{R}_2(\tilde{U}_0)$, $\hat{S}_2(\tilde{U}_0)$ は、容易に

$$
\begin{aligned}
\hat{R}_2(\tilde{U}_0): &\quad \tilde{u} = \tilde{u}_0 - \int_{\tilde{v}_0}^{\tilde{v}} \sqrt{-\tilde{P}'(\xi)}d\xi \quad (\tilde{v} \geq \tilde{v}_0) \\
\hat{S}_2(\tilde{U}_0): &\quad \tilde{u} = \tilde{u}_0 - (\tilde{v} - \tilde{v}_0) f_2(\tilde{v}; \tilde{v}_0) \quad (\tilde{v} \leq \tilde{v}_0)
\end{aligned}
$$

であり、それぞれ $R_1(\tilde{U}_0)$, $S_1(\tilde{U}_0)$ と $\tilde{u} = \tilde{u}_0$ に関して対称であることが言える。

リーマン問題の解法もオイラー座標系の場合とほぼ同様である。

# A　命題 3.1 の証明

## A.1　証明と説明

この節では、リーマン不変量に関する命題 3.1 を証明する。

まず次の補題を示す。

### 補題 A.1

$N \times N$ 行列 $A$, $X = [X_1 \ \cdots \ X_N]$ に対し、

$$\sum_{j=1}^{N} |X_1 \ \cdots \ AX_j \ \cdots \ X_N| = \mathrm{tr}(A)|X| \tag{A.1}$$

(左辺の和の項は $j$ 列目のみが $A$ 倍、されている形、$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN}$)

証明

行列 $A$ を

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix} = A_1 + A_2 + \cdots + A_N$$

と分けると、(A.1) の左辺、右辺は共に行列 $A$ に関して線形な式であるから、各 $A_k$ に対して (A.1) を示せば、$A$ に対しても (A.1) が成り立つことになる。

$$A_k X_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \alpha_k X_j \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = (\alpha_k X_j)\boldsymbol{e}_k = \left( \sum_{m=1}^{N} a_{km} x_{mj} \right) \boldsymbol{e}_k$$

より、$A_k$ に対して (A.1) の左辺は

$$\sum_{j=1}^{N} |X_1 \ \cdots \ A_k X_j \ \cdots \ X_N| = \sum_{j=1}^{N} |X_1 \ \cdots \ \boldsymbol{e}_k \ \cdots \ X_N| \sum_{m=1}^{N} a_{km} x_{mj}$$

となるが、右辺の行列式を $j$ 列目で展開すれば

$$|X_1 \ \cdots \ \boldsymbol{e}_k \ \cdots \ X_N| = (-1)^{k+j} \Delta_{kj}(X)$$

となるので、行列式の良く知られた性質より、

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} |X_1 \ \cdots \ A_k X_j \ \cdots \ X_N| \\
&= \sum_{j=1}^{N} \sum_{m=1}^{N} a_{km} x_{mj} (-1)^{k+j} \Delta_{kj}(X) = \sum_{m=1}^{N} a_{km} \sum_{j=1}^{N} (-1)^{k+j} x_{mj} \Delta_{kj}(X) \\
&= \sum_{m=1}^{N} a_{km} \delta_{km} |X| = a_{kk} |X| \\
&= \mathrm{tr}(A_k) |X|
\end{aligned}$$

となる。■

## 補題 A.2

$r(U)$ が $\Omega$ 内で滑らかで、かつ 0 ではないベクトルであるとき、

$$\frac{\partial V}{\partial t_1}, \frac{\partial V}{\partial t_2}, \ldots, \frac{\partial V}{\partial t_N}$$

が一次独立で、

$$\frac{\partial V}{\partial t_N} = r(V)$$

を満たすベクトル値関数 $U = V(t_1, t_2, \ldots, t_N)$ が (大域的に) 存在する。

証明

このような関数の局所的な存在は、通常の常微分方程式の理論から得られる。まず、相空間 $\Omega$ 上に、$r(U)$ とは接しない ($(N-1)$ 次元の) 滑らかな初期面

$$S:\ U = \eta(t_1, t_2, \ldots, t_{N-1})$$

を取る ($t_1, t_2, \ldots, t_{N-1}$ は、この初期面を表現するパラメータ)。これに対して、常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dU}{dt_N} = r(U), \quad U|_{t_N=0} = \eta(t_1, t_2, \ldots, t_{N-1})$$

の解を $U = V(t_1, t_2, \ldots, t_N)$ とする。常微分方程式の一般論より容易にわかるように、$V$ は各 $t_k$ に関して滑らかで、$S$ に対する仮定より $t_N = 0$ のときに

$$\left|\frac{\partial V}{\partial t_1}\ \frac{\partial V}{\partial t_2}\ \cdots\ \frac{\partial V}{\partial t_N}\right| \neq 0$$

であるから、$|t_N|$ が十分小さければこの行列式は 0 ではない。この値が、任意の $t_N$ (解が存在し続ける間) に対して 0 ではないことを示す。

今、この行列式 (ヤコビ行列式) を $Y = Y(t_1, \ldots, t_N)$ とすると

$$Y(t_1, \ldots, t_N) = |V_{t_1}\ V_{t_2}\ \ldots\ V_{t_N}|$$

仮定より $Y(t_1, \ldots, t_{N-1}, 0) \neq 0$ であり、この $Y$ を $t_N$ で微分すると、

$$Y_{t_N} = \sum_{j=1}^{N} |V_{t_1}\ \ldots (V_{t_j})_{t_N}\ \ldots\ V_{t_N}|$$

であり、

$$(V_{t_j})_{t_N} = (V_{t_N})_{t_j} = r(U)_{t_j} = \nabla_U r(V) V_{t_j}$$

となるので、補題 A.1 より、

$$Y_{t_N} = \sum_{j=1}^{N} |V_{t_1}\ \ldots \nabla_U r(V) V_{t_j}\ \ldots\ V_{t_N}| = \mathrm{tr}(\nabla_U r(V))Y = (\nabla_U \cdot r(V))Y$$

となる ($\nabla \cdot r$ は $r$ の発散)。よって、これを $Y$ に関する微分方程式と見れば、

$$Y(t_1,\ldots,t_N) = Y(t_1,\ldots,t_{N-1},0)\exp\left(\int_0^{t_N}(\nabla_U \cdot r(V))(t_1,\ldots,t_{N-1},\tau)d\tau\right)$$

と書けるので、$Y(t_1,\ldots,t_{N-1},0) \neq 0$ より、解 $V$ が存在している間は $Y(t_1,\ldots,t_N)$ は 0 にはならない。■

次は、命題 3.1 の 1. の説明を行う (「証明」とは言えないことについては、A.2 節参照)。

説明

補題 A.2 の $U = V(t_1,\ldots,t_N)$ は、そのヤコビ行列式 $Y$ が 0 ではないので、$(t_1,\ldots,t_N)$ と $U$ とを 1 対 1 に対応させる。よって、これを逆に解いて、各 $t_j$ を $U$ の関数 $t_j = t_j(U)$ と見ることができる。

この $t_j(U)$ は、$t_j(V(t_1,\ldots,t_N)) \equiv t_j$ であるので、

$$\frac{\partial t_j}{\partial t_k} = \nabla_U t_j(V)\frac{\partial V}{\partial t_k} = \delta_{jk}$$

であり、よって、

$$\begin{bmatrix} \nabla_U t_1(V) \\ \vdots \\ \nabla_U t_N(V) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial V}{\partial t_N} \end{bmatrix} = E$$

となるから $\nabla_U t_1(U)$,...,$\nabla_U t_N(U)$ は一次独立。そして、$j < N$ に対して、

$$0 = \frac{\partial t_j}{\partial t_N} = \nabla_U t_j(V)\frac{\partial V}{\partial t_N} = \nabla_U t_j(V) r(V)$$

であるから、よって、この $t_1(U)$,...,$t_{N-1}(U)$ がこの命題の $w_j(U)$ の組となる。■

次は、命題 3.1 の 2. の説明 (「証明」とは言えないことについては、A.2 節参照)。

説明

上の説明にあるように、$w_j(U)$ として $t_j(U)$ $(j < N)$ を取ればもちろんであるが、命題 3.1 の条件を満たす一般の $w_j(U)$ に対しても、それに対して上の説明の $t_N(U)$ を $w_N(U)$ とすると、$\nabla_U w_N(U)$ は

$$1 = \frac{\partial t_N}{\partial t_N} = \nabla_U t_N(V)\frac{\partial V}{\partial t_N} = \nabla_U w_N(V) r(V)$$

を満たすので、

$$\nabla_U w_N(U) \notin \langle \nabla_U w_1(U), \ldots, \nabla_U w_{N-1}(U) \rangle$$

となる。よって、$\nabla_U w_1(U)$,...,$\nabla_U w_N(U)$ は一次独立となり、$U$ と $(w_1, \ldots, w_N)$ が 1 対 1 に対応する。これを逆に解いて $U = W(w_1, \ldots, w_N)$ と見ることができる。

今、命題 3.1 の 2. の条件を満たす $\tilde{w}$ に $U = W(w_1, \ldots, w_N)$ を代入すれば、これを $w_1$,...,$w_N$ の関数と見れるが、

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_U \tilde{w}(U) r(U) = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial u_j} r_j(U) \\
&= \sum_{j=1}^{N} r_j(U) \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial w_k} \frac{\partial w_k}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial w_k} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial w_k}{\partial u_j} r_j(U) \\
&= \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \tilde{w}}{\partial w_k} \nabla_U w_k(U) r(U) = \frac{\partial \tilde{w}}{\partial w_N} \nabla_U w_N(U) r(U) \\
&= \frac{\partial \tilde{w}}{\partial w_N}
\end{aligned}$$

となる。よって、$\partial\tilde{w}/\partial w_N = 0$ より $\tilde{w}$ は $w_N$ によらないことになり、$w_1$,...,$w_{N-1}$ の関数と書けることになる。■

## A.2 注意

この節では、補題 A.2 の $U = V(t_1, \ldots, t_N)$ の存在と、それを逆に $t_j$ について解くことを用いているが、その逆に解いたものの定義域が $\Omega$ 全体になること、すなわち $V$ の値域が $\Omega$ 全体であることの保証は実は与えていない。よって、特別な $\Omega$ と特別な

$r(U)$ に対しては、$V$ の値域が $\Omega$ 全体とはならないかもしれないので、その点では上の命題 3.1 の説明はは「完全な証明」とは言えない。

ただ、大筋ではこのような形で説明できるし、またそれを完全にするにはかなり細かい議論や詳しい知識等も多分必要となるので、ここでそれらを行うのは本稿の趣旨からして適当ではないと思われる。よって、それらにはあまり深入りはせず、この程度にしておく。

# B 弱解

不連続性を持つような一般的な関数に対して、それが方程式

$$U_t + F(U)_x = 0 \tag{B.1}$$

の解であることを定義する方法として、弱解という概念がある。現在、保存則方程式の数学の研究レベルでの議論は、通常この弱解を用いて行われている。ここではそれを紹介する。

一般に、$Q \subset R^M$ に対し、関数の集合 $C^1(Q)$ を

$C^1(Q) = Q$ 上定義された関数で、$Q$ 上連続かつ微分可能で、そのすべての 1 階 (偏) 導関数も $Q$ 上連続あるもの全体の集合

とし、$C^1_0(Q)$ を

$C^1_0(Q) = C^1(Q)$ の関数で、その台が $Q$ 上コンパクトであるもの全体の集合

と定める。ここで、$f \in C^1(Q)$ に対し、その **台** (support) とは、

$$\{x \in Q; f(x) \neq 0\} \ (= Q \setminus f^{-1}(\{0\}))$$

の、$Q$ における閉包 (それを含む最小の閉集合) のことを指し、それを $\mathrm{supp}\, f$ と書く。また、$K \subset Q$ が **コンパクト** (compact) であるとは、$K$ 内の任意の点列が常に $Q$ 内のある点に収束するような部分列を持つことを意味する。

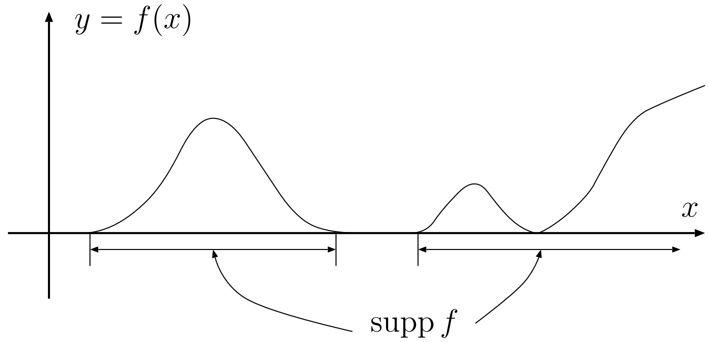



図 B.1: 台

例えば、$M = 1$, $Q = (0,1) = \{x;\ 0 < x < 1\}$ のとき、$[a,b] = \{x;\ a \leq x \leq b\}$ は、$0 < a < b < 1$ であれば $Q$ 内でコンパクトである。一方、$(0,1/2] = \{x;\ 0 < x \leq 1/2\}$ は、($Q$ の 相対位相に関して) $Q$ の 閉部分集合であるが、この集合内の点列

$$\left\{\frac{1}{n+1};\ n = 1,2,\ldots\right\} = \left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\ldots\right\}$$

は、$Q$ 内に収束する部分列を持たないので、コンパクトではない。

しかし、端が含まれてはいけない、というわけではなくて、例えば $Q = [0,1) = \{x;\ 0 \leq x < 1\}$ の場合には、$[0,1/2]$ は $Q$ のコンパクトな部分集合となる。

つまり荒く言えば、コンパクトとは、「有界 (無限に伸びていない) な閉集合で、それを $R^M$ 全体の部分集合と見たときの境界までキッチリ $Q$ に含まれる部分集合」となる。

よって、$f \in C_0^1((0,1))$ の場合は、

$$\operatorname{supp} f \subset [a,b] \quad (0 < a < b < 1)$$

となるような $a, b$ が存在し、$f$ は $0 < x \leq a$, $b \leq x < 1$ では $0$ となるが、$g \in C_0^1([0,1))$ の場合は、

$$\operatorname{supp} g \subset [0,b] \quad (0 < b < 1)$$

となるような $b$ が存在するとしか言えず、よって $g(0) \neq 0$ でも構わない。

以下の命題 B.1 のように、集合 $C_0^1(Q)$ には十分多くの関数が含まれていることが知られている。

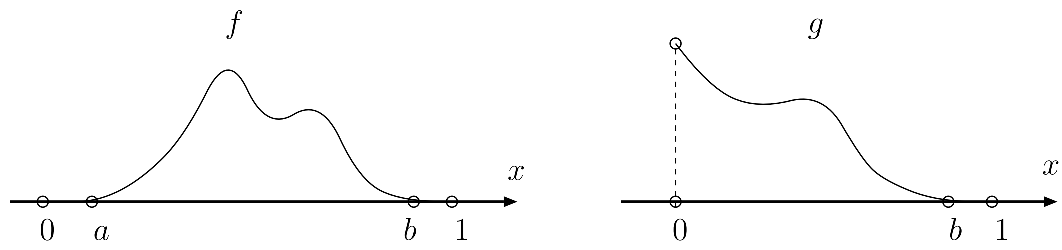



図 B.2: $f$ と $g$ の台

## 命題 B.1

$Q$ が $R^M$ の開領域であるとき、$f(x) \in L^1_{loc}(Q)$ が、任意の $\phi(x) \in C^1_0(Q)$ に対し、

$$\int_Q f(x)\phi(x)dx = 0$$

となるならば、$f(x)$ は $Q$ 上ほとんどいたるところで 0 となる。

なお、$f \in L^1_{loc}(Q)$ であるとは、$f$ が $Q$ 上ルベーグ可測な関数で、$Q$ 内の任意のコンパクト集合 $K$ に対して

$$\int_K |f(x)|dx < \infty$$

となることを言う。

もし、$\phi$ が $C^1_0(Q)$ でなく、どんな関数でもいいという条件ならば、

$$\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{|f(x)|} & (x \in K \text{ かつ } f(x) \neq 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とすれば、

$$0 = \int_Q f(x)\phi(x)dx = \int_K |f(x)|dx$$

となるので、確かに $Q$ 上ほとんどいたるところ $f(x) = 0$ となることが簡単に言えるが、こんな不連続な $\phi(x)$ を許さずに $C^1_0(Q)$ だけに制限しても命題 B.1 が言える、と

いうことは、それに相当するような関数 (それを近似するような関数列) が $C_0^1(Q)$ にも含まれている、それ位 $C_0^1(Q)$ には色んな関数が入っている、ということを意味する。弱解においては、$C_0^1(Q)$ の関数は **テスト関数** (test function) とも呼ばれる。

なお、命題 B.1 の証明にはルベーグ積分等の知識を必要とするので、ここではその証明は行わない。

さて、$Q$ が $(t,x)$ 平面 $R^2$ の開領域であるとき、$U=U(t,x)\in L^1_{loc}(Q)$ が、$Q$ 上で方程式 (B.1) の **弱解** (weak solution) であるとは、任意の $\phi(t,x)\in C_0^1(Q)$ に対して、

$$\iint_Q \{U(t,x)\phi_t(t,x)+F(U(t,x))\phi_x(t,x)\}dxdt=0 \tag{B.2}$$

を満たすこと、と定義される。

これは、少なくとも形式的には、方程式 (B.1) に $\phi(t,x)$ をかけて、$Q$ 上で部分積分して得られる式である。この式 (B.2) には、$U$ や $F(U)$ の微分は含まれていないので、$U$ が微分可能でない関数でも構わなくて、弱解にはなりうる。

又、もし $U(t,x)$ が $Q$ 上滑らかな (B.2) の解であれば、$Q$ 上で

$$U\phi_t+F(U)\phi_x=(U\phi)_t+\{F(U)\phi\}_x-\phi\{U_t+F(U)_x\}=(U\phi)_t+\{F(U)\phi\}_x$$

となり、また $\phi\in C_0^1(Q)$ より $\phi$ は $Q$ の境界 $\partial Q$ 上 0 となるから、Green の公式 (4.6) により、

$$\begin{aligned}
&\iint_Q \{U(t,x)\phi_t(t,x)+F(U(t,x))\phi_x(t,x)\}dxdt\\
&= \iint_Q \{(U\phi)_t+(F\phi)_x\}dxdt=\oint_{\partial Q}(-U\phi dx+F\phi dt)=0
\end{aligned}$$

となって (B.2) を満たす。よって、滑らかな (B.2) の解は弱解となるので、弱解は通常の解を含むより広い概念であることがわかる。

逆に、$U$ が滑らかな関数で、かつ弱解、すなわち任意の $\phi\in C_0^1(Q)$ に対し (B.2) を満たせば、

$$0 = \iint_Q (U\phi_t+F\phi_x)dxdt$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_Q \{(U\phi)_t + (F\phi)_x\} dxdt - \iint_Q \phi(U_t + F_x) dxdt \\
&= \oint_{\partial Q} (-U\phi dx + F\phi dt) - \iint_Q \phi(U_t + F_x) dxdt \\
&= -\iint_Q \phi(U_t + F_x) dxdt
\end{aligned}
$$

となり、よって任意の $\phi \in C_0^1(Q)$ に対して

$$
\iint_Q \phi(U_t + F_x) dxdt = 0
$$

となるので、命題 B.1 により $U$ は方程式 (B.1) を満たすことがわかる。つまり、滑らかな関数に対しては、(B.1) を満たす通常の解と弱解は同値であることがわかる。

しかもこの議論は局所化ができ、もし $U$ が弱解で、その一部分が滑らかであるならば、その部分にだけ台を持つテスト関数に対して今の計算を行えばわかるが、結局、その滑らかな部分ではやはり (B.1) を満たすことになる。つまり、弱解は滑らかな部分では必ず (B.1) を満たす必要があることがわかる。

又、上の計算と 4.2 節の計算を見比べるとわかるが、$U$ が弱解であり、不連続線 $x = d(t)$ の両側で滑らかで (よって (B.1) を満たし)、$x = d(t)$ では第一種不連続であるならば、

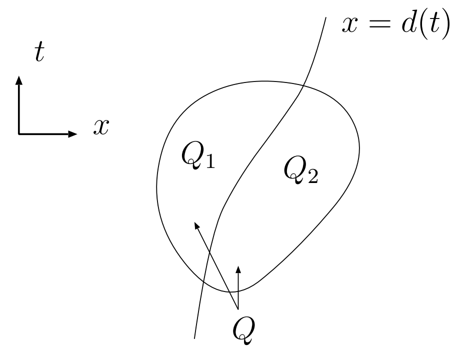



図 B.3: $Q$ と $x = d(t)$

$$
\begin{aligned}
0 &= \iint_Q (U\phi_t + F\phi_x) dxdt \\
&= \left( \iint_{Q_1} + \iint_{Q_2} \right) (U\phi_t + F\phi_x) dxdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \iint_{Q_1}\{(U\phi)_t+(F\phi)_x\}dxdt+\iint_{Q_2}\{(U\phi)_t+(F\phi)_x\}dxdt\\
&= \oint_{\partial Q_1}(-U\phi dx+F\phi dt)+\oint_{\partial Q_2}(-U\phi dx+F\phi dt)
\end{aligned}
$$

となるが、$\partial Q_1$, $\partial Q_2$ のうち $Q$ の境界である部分では $\phi=0$ で、よって $x=d(t)$ 上での積分だけが残ることになり、

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{x=d(t)}(-U\phi d'(t)+F\phi dt)\Big|_{x=d(t)-0}dt+\int_{x=d(t)}(U\phi d'(t)-F\phi dt)\Big|_{x=d(t)+0}dt\\
&= \int_{x=d(t)}\phi(t,d(t))\{[U]d'(t)-[F]\}dt
\end{aligned}
$$

となるので、$\phi$ の任意性により

$$
[U]d'(t)=[F]
$$

すなわち、ランキン-ユゴニオ条件が導かれることになる。逆に、$U$ が不連続線の両側で滑らかで (B.1) を満たし、不連続線ではランキン-ユゴニオ条件を満たせば、そこで弱解となることも上の計算よりわかる。

つまり、弱解は、

- 滑らかな関数に対しては (B.1) と同値
- 一部でも滑らかな部分では (B.1) を満たす
- 不連続線ではランキン-ユゴニオ条件を満たすことと同値
- もっと複雑な不連続性を持つような関数に対しても、(B.2) の形であれば定義や確認が行える

ということが言える便利な定義であることになる。

また、初期値問題

$$
\left\{
\begin{array}{ll}
U_t+F(U)_x=0 & (0<t<T,\ x\in R)\\
U(0,x)=U_0(x) & (x\in R)
\end{array}
\right.
$$

($U_0(x) \in L^1_{loc}(R)$ は与えられた初期値) に対する弱解は、次のように定義される。

任意の $\phi(t,x) \in C^1_0([0,T) \times R)$ に対し、

$$\iint_Q \{U\phi_t + F(U)\phi_x\} dxdt + \int_R \phi(0,x)U_0(x)dx = 0 \tag{B.3}$$

を満たすこと。

なお、$\phi$ は $C^1_0([0,T) \times R)$ の関数となっているので、$t=0$ での値 $\phi(0,x)$ は一般には (恒等的には) 0 ではない。

この定義も (B.2) の場合と同様の性質を持ち、滑らかで $U(+0,x) = \lim_{t\to+0} U(t,x)$ を持つ $U(t,x)$ がこの弱解の定義を満たすことは、(B.1)、およびほとんどすべての $x$ に対して $U(+0,x) = U_0(x)$ を満たすことと同値であることが容易にわかる。

本稿でこれまでに述べた膨張波や衝撃波、接触不連続、およびそれらから構成されたリーマン問題の解は、いずれも (B.3) を満たす弱解になっている。

ただし、これらの弱解の定義には 4.7 節で述べたラックス条件のようなものは含まれないので、物理的に認められない膨張衝撃波のようなものまで含まれてしまうし、解の一意性が保証されない。しかし、ラックス条件は、不連続性が第一種不連続な衝撃波として明確に現われる部分でしか設定できないので、一般の弱解に対してその条件を設定することは困難である。

よって、一般の弱解から物理的に意味のある弱解のみを選択するために、ラックス条件に代わる何らかの条件を課す必要があるが、それが C 節で与えるエントロピー条件と呼ばれるものである。

# C　エントロピー条件

## C.1　理想気体に対するエントロピー

B 節の最後で述べたように、一般の弱解に対して物理的に意味のある解を選別するための、ラックス条件に代わるエントロピー条件についてここで説明する。まず、具体的なエントロピーについて紹介し、その後で数学的なエントロピーとエントロピー条件について説明することにする。

2 節で考察した理想気体では、よく知られているように定常状態の気体に対して状態方程式

$$pV = nRT \tag{C.1}$$

が成り立つとする。$p$ は単位面積あたりの気体の圧力、$V$ は気体の体積、$n$ は気体のモル数、$R$ は気体の種類などにはよらない定数 (気体定数)、$T$ は絶対温度である。

2 節の記号で書くと、$a \le x \le b$ の範囲の定常的な気体で考えれば、

$$p = \frac{1}{A}P, \quad V = (b-a)A \quad (A \text{ は管の断面積})$$

となるが、この部分の気体の質量は、

$$M^1_{[a,b]} = (b-a)\rho = n\alpha \quad (\alpha \text{ はこの気体の (平均) 分子量})$$

に等しい。よって、

$$V = A\frac{n\alpha}{\rho}$$

と書けるので、これらを (C.1) に代入すれば

$$T = \frac{PV}{nR} = \frac{(b-a)P}{nR} = \frac{\alpha}{R}\,\frac{P}{\rho}$$

が得られる。

また、気体の 1 モルあたりの内部エネルギー $e_m$ は、理想的な場合には $c_v$ を定数 (定積モル比熱) として

$$e_m = c_v T$$

と書けることが知られている。これに対し、2.5 節の $e$ は単位質量あたりの内部エネルギーなので、$e_m = \alpha e$ であり、よって、

$$e = \frac{1}{\alpha}e_m = \frac{c_v}{\alpha}T = \frac{c_v}{R}\,\frac{P}{\rho} \tag{C.2}$$

となる。$c_p$ を低圧モル比熱、$\gamma = c_p/c_v$ (比熱比) とすると、$c_p = c_v + R$ という関係 (マイヤーの関係) が成り立つことが知られていて、よって、

$$\gamma = \frac{c_v + R}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v}$$

となり、(C.2) より

$$e = \frac{1}{\gamma - 1}\frac{P}{\rho}$$

が得られる。これが (2.17) である。

さて、エントロピーは、1 モルあたりの気体の熱量 $Q$ に対して

$$dQ = TdS_m$$

なるものとして定義される。ここで $S_m$ は気体の 1 モルあたりのエントロピーである。

熱力学の第 1 法則により、1 モルの気体に対して

$$TdS_m = dQ = de_m + pdV$$

が成り立つ。今、単位質量あたりのエントロピーを $S$ とすれば $S_m = \alpha S$ であり、$n$ モルの気体に対する熱量変化を書けば、

$$Td(nS_m) = d(ne_m) + pdV$$

であり、よって、

$$n\alpha TdS = n\alpha de + pdV$$

となるので、

$$\begin{aligned} TdS &= de + \frac{p}{n\alpha}dV = de + \frac{1}{n\alpha}\frac{P}{A}d\left(A\frac{n\alpha}{\rho}\right) = de + Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) \\ &= d\left(\frac{1}{\gamma-1}\frac{P}{\rho}\right) + Pd\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{\rho}dP - \frac{1}{\gamma-1}\frac{P}{\rho^2}d\rho - \frac{P}{\rho^2}d\rho \\ &= \frac{1}{\gamma-1}\frac{1}{\rho}dP - \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P}{\rho^2}d\rho = e\left(\frac{dP}{P} - \gamma\frac{d\rho}{\rho}\right) \end{aligned}$$

となる。$T = \alpha e/c_v$ より、この両辺を $T$ で割れば、

$$dS = \frac{c_v}{\alpha}\left(\frac{dP}{P} - \gamma\frac{d\rho}{\rho}\right)$$

が得られる。よって、これを積分すれば

$$S = S_0 + \frac{c_v}{\alpha}\log\frac{P}{\rho^\gamma} \tag{C.3}$$

と表される。また、

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_\rho = \frac{1}{P}\,\frac{c_v}{\alpha},\quad \left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)_P = -\frac{\gamma}{\rho}\,\frac{c_v}{\alpha}$$

であることがわかる。

## C.2 数学的な一般化エントロピー

前節で物理的なエントロピー $S = S(\rho, P)$ を (C.3) として導いたが、今度はこれと方程式 (3.12) との数学的な関係を見てみる。

この方程式 (3.12) の滑らかな解に対しては、(3.14) より、

$$\begin{aligned} S_t &= S_\rho\rho_t + S_P P_t = -\frac{\gamma}{\rho}\,\frac{c_v}{\alpha}(-\rho_x u - \rho u_x) + \frac{1}{P}\,\frac{c_v}{\alpha}(-\gamma P u_x - u P_x) \\ &= \frac{c_v}{\alpha}\left(\gamma\frac{u}{\rho}\rho_x - \frac{u}{P}P_x\right) = -S_\rho u\rho_x - S_P u P_x \\ &= -uS_x \end{aligned}$$

となるので、よって

$$S_t + uS_x = 0$$

が成り立つ。$S$ は単位質量あたりのエントロピーなので、全質量に対するエントロピー $\rho S$ を考えると、

$$(\rho S)_t = \rho_t S + \rho S_t = -(\rho u)_x S - \rho u S_x = -(\rho u S)_x$$

となるので、

$$(\rho S)_t + (\rho u S)_x = 0$$

となることがわかる。

このように、一般に保存則方程式

$$U_t + F(U)_x = 0 \tag{C.4}$$

の滑らかな解に対して、必ず

$$\eta(U)_t + q(U)_x = 0 \tag{C.5}$$

となるスカラー関数 $\eta(U)$, $q(U)$ が存在する場合、これを **(一般化された) エントロピー対** (generalized entropy pair) と呼び、$\eta(U)$ を **エントロピー関数** (entropy)、$q(U)$ を **エントロピー流束** (entropy flux) と呼ぶ。

式 (C.5) は

$$\nabla_U \eta(U) U_t + \nabla_U q(U) U_x = 0$$

と書けるので、(C.4) より

$$\{-\nabla_U \eta(U) \nabla_U F(U) + \nabla_U q(U)\} U_x = 0$$

となる。よって、$(\eta(U), q(U))$ がエントロピー対となることは、

$$\nabla_U q(U) = \nabla_U \eta(U) \nabla_U F(U) \tag{C.6}$$

が成り立つことを意味する。

しかし、(C.5) は衝撃波では成立しない。それを調べるために、不連続線での $(\eta, q)$ に対するランキン-ユゴニオ条件のような式

$$\Phi = s[\eta] - [q] = s(\delta)\{\eta(U(\delta)) - \eta(U_0)\} - \{q(U(\delta)) - q(U_0)\}$$

を調べてみる。ここで、$U(\delta)$ は、衝撃波曲線 (4.7 節)、または接触不連続曲線 (4.6 節) を表し、$U(0) = U_0$, $s(0) = \lambda_j(U_0)$ であるとする。

(C.6) より、

$$\begin{aligned}\frac{d\Phi}{d\delta} &= s'[\eta] + s\eta' - q' = s'[\eta] + s\nabla_U \eta(U)U' - \nabla_U q(U)U' \\ &= s'[\eta] + \nabla_U \eta(U)\{s - \nabla_U F(U)\}U'\end{aligned}$$

となるが、ランキン-ユゴニオ条件

$$s[U] - [F] = s(\delta)\{U(\delta) - U_0\} - \{F(U(\delta)) - F(U_0)\} = 0$$

を微分すれば、

$$s'[U] + sU' - F' = s'[U] + \{s - \nabla_U F(U)\}U' = 0$$

なので、

$$\frac{d\Phi}{d\delta} = s'[\eta] - s'\nabla_U \eta(U)[U] = -s'\{\eta(U_0) - \eta(U) - \nabla_U \eta(U)(U_0 - U)\} \tag{C.7}$$

となる。今、

$$\psi(\theta) = \eta(U + \theta(U_0 - U))$$

とすれば、$\psi'(\theta) = \nabla_U \eta(U + \theta(U_0 - U))(U_0 - U)$ より、(C.7) の中かっこ内は、

$$\psi(1) - \psi(0) - \psi'(0) = \int_0^1 (1-\theta)\psi''(\theta)d\theta$$

と書ける。今、$\nabla_U^2 \eta$ を、$(i,j)$ 成分が $\partial^2\eta/\partial u_i \partial u_j$ である $N \times N$ 行列であるとすると、

$$\psi''(\theta) = {}^T(U_0 - U)\nabla_U^2 \eta(U + \theta(U_0 - U))(U_0 - U)$$

であるので、$\nabla_U^2 \eta$ が正定値 (つまり $\eta$ が凸) であれば、(C.7) の中かっこ内は正となる。ここで、$\nabla_U^2 \eta$ が正定値であるとは、任意のベクトル $X \neq 0$ に対して、2 次形式

${}^T X \nabla_U^2 \eta X$ が正であることを意味する。$\eta$ が凹 ($\nabla_U^2 \eta$ が負定値) ならば逆に (C.7) の中かっこは負となる。

また、$s'(\delta)$ は、衝撃波の場合は

$$s'(0) = \frac{1}{2} \nabla_U \lambda_j(U) r_j(U) > 0$$

であったから、少なくとも $|\delta|$ が十分小さければ $s'(\delta) > 0$ となる。

よって衝撃波の場合は、$\eta$ が凸ならば $\delta \neq 0$ のときは $\Phi'(\delta) < 0$ となり、$\Phi(0) = 0$ より、

$$\delta < 0 \Leftrightarrow \Phi > 0$$

となる。$\eta$ が凹ならば、逆に

$$\delta < 0 \Leftrightarrow \Phi < 0$$

となる。

つまり、$\eta$ が凸か凹ならば、$\Phi$ は衝撃波に対してはどこでも一定符号であることになる。後で示すように (C.4 節参照)、$\rho S$ は $U = {}^T(\rho, m, E)$ に関して凹となるので、それが言える。

一方、接触不連続に対しては、

$$s'(\delta) = \{\lambda_j(U_0)\}' = 0$$

なので、$\Phi$ は 0 である。よって、$\Phi$ の符号を指定すること (例えば凸なエントロピーに対して $\Phi > 0$ のような条件) によって、適切な衝撃波のみを選択できることがわかる。

## C.3 エントロピー条件

4.2 節と同様の計算を式 (C.5) に対して行うと、

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_a^b \eta(U(t_0, x))dx + \int_{X_1}^{X_2} \eta(U(t_1, x))dx + \int_{t_0}^{t_1} \Big[ q - u\eta \Big]_{X(t;t_0,a)}^{X(t;t_0,b)} dt \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \Phi dt \end{aligned}$$

となることがわかる。特に、$(\eta, q) = (\rho S, \rho u S)$ のように $q - u\eta = 0$ 場合は 3 項目の積分は消えるので、

$$\int_{X_1}^{X_2} \eta(U(t_1, x))dx = \int_a^b \eta(U(t_0, x))dx - \int_{t_0}^{t_1} \Phi dt \tag{C.8}$$

となり、$\eta$ が凸 (または凹) ならば $\Phi$ は正 (または負) となるので、エントロピーの総量は減少 (または増加) することになる。$\eta = \rho S$ は実は凹なので (C.4 節参照)、(C.8) はエントロピー増大という熱力学第 2 法則を意味する。

ここからの類推として、弱解にも同様の条件、すなわち凸なエントロピーに対して「エントロピーの総量が減少していること」を課すのがエントロピー条件である ($\rho S$ は凹なので、$\rho S$ とは逆になることに注意)。

しかし、一般の $L^1_{loc}(Q)$ の関数に対して、線積分

$$\int_{X_1}^{X_2} \eta(U(t_1, x))dx$$

の形で条件を課すのはあまり都合がよくないので、弱い意味で、

$$\eta(U)_t + q(U)_x \leq 0$$

を満たすこと、すなわち、

> 「凸なエントロピー関数を持つ任意のエントロピー対と任意の非負なテスト関数 $\phi \in C^1_0(Q)$ に対して
>
> $$\iint_Q \{\eta(U)\phi_t + q(U)\phi_x\} dxdt \geq 0 \tag{C.9}$$
>
> を満たすこと」

を、**エントロピー条件** (entropy condition) と呼ぶ。

保存則の一般的な解の存在定理では、通常ラックス条件の代わりにこの条件が用いられる。この形の条件であれば、単純な不連続性の関数でなく、もっと一般の $L^1_{loc}(Q)$ の関数に対して適用できる。

以下に、簡単な場合についてこの条件を考えてみる。

解 $U$ が滑らかな部分では、$\eta_t + q_x = 0$ となるので、もちろんエントロピー条件は満たされる。

$U$ が不連続線 $d = d(t)$ の両側で滑らかな場合は、条件 (C.9) は、B 節の図 B.3 のように分けて計算すれば、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \iint_Q \{\eta(U)\phi_t + q(U)\phi_x\} dxdt = \left(\iint_{Q_1} + \iint_{Q_2}\right)(\eta\phi_t + q\phi_x)dxdt \\ &= \iint_{Q_1}\{(\eta\phi)_t + (q\phi)_x\}dxdt + \iint_{Q_2}\{(\eta\phi)_t + (q\phi)_x\}dxdt \\ &= \oint_{\partial Q_1}(-\eta\phi dx + q\phi dt) + \oint_{\partial Q_2}(-\eta\phi dx + q\phi dt) \\ &= \int_{x=d(t)} \phi(t, d(t))\{[\eta]d'(t) - [q]\}dt \end{aligned}$$

となるので、$\phi$ の任意性より、$\Phi = d'(t)[\eta] - [q]$ が各 $t$ で 0 以上でなければならないことになる。よって C.2 節の結果より、接触不連続の場合は無条件、衝撃波の場合はラックス条件を満たす衝撃波のみが許されることになる。

## C.4 物理的なエントロピーの凹性

最後に、C.3 節で述べた、$\eta = \rho S$ の $U = {}^T(\rho, m, E)$ での凹性について述べておく。

この $U$ に関する 2 階微分による行列 $\nabla_U^2 \eta$ を計算するわけであるが、この行列の計算は、これまでのように $W = {}^T(\rho, u, P)$ で行えばよい、とはいかない。まずは、そこから検証する。

$\eta(U)$ に $U = G(W)$ を代入したものを $\hat{\eta}(W) = \eta(G(W))$ とすると、

$$\nabla_W \hat{\eta}(W) = \nabla_U \eta(U) \nabla_W G(W)$$

であり、また、

$$\nabla_W^2 \hat{\eta}(W) = \nabla_W {}^T\Big(\nabla_W \hat{\eta}(W)\Big)$$

であるから、

$$\nabla_W^2 \hat{\eta}(W) = \nabla_W {}^T(\nabla_U \eta \nabla_W G) = \nabla_W \left\{ {}^T(\nabla_W G)\, {}^T(\nabla_U \eta) \right\}$$

となる。

今、$N \times N$ 行列 $A(W)$ と定数列ベクトル ($N \times 1$ 行列) $X$ に対し、

$$\begin{aligned}
\nabla_W (A(W)X) &= \left( \frac{\partial \, (A(W)X)}{\partial \, w_1}, \ldots, \frac{\partial \, (A(W)X)}{\partial \, w_N} \right) \\
&= \left( \frac{\partial \, A(W)}{\partial \, w_1} X, \ldots, \frac{\partial \, A(W)}{\partial \, w_N} X \right)
\end{aligned}$$

という $N \times N$ 行列となるが、これを記号的に

$$\nabla_W A(W) \otimes X$$

と書くことにする ($\nabla_W A(W)$ は、単独では意味のない記号になってしまうので、特にこのように書くこととする)。こうすれば、$X$ も $W$ の関数 $X = X(W)$ である場合も

$$\nabla_W (A(W)X(W)) = \nabla_W A(W) \otimes X + A(W) \nabla_W X(W)$$

のように、積の微分の形に書くことができる。

この記法により、

$$\begin{aligned}
\nabla_W^2 \hat{\eta}(W) &= \nabla_W \left\{ {}^T(\nabla_W G)\, {}^T(\nabla_U \eta) \right\} \\
&= \nabla_W {}^T(\nabla_W G) \otimes {}^T(\nabla_U \eta) + {}^T(\nabla_W G) \nabla_W {}^T(\nabla_U \eta)
\end{aligned}$$

となるが、

$$\nabla_W {}^T(\nabla_U \eta) = \nabla_U \Big( {}^T(\nabla_U \eta) \Big) \nabla_W G = \nabla_U^2 \eta(U) \nabla_W G$$

なので、よって、

$$\nabla_W^2 \hat{\eta}(W) = \nabla_W {}^T(\nabla_W G) \otimes {}^T(\nabla_U \eta) + {}^T(\nabla_W G) \nabla_U^2 \eta(U) \nabla_W G$$

となる。

今、右辺の最初の行列を $B = \nabla_W \, {}^T(\nabla_W G) \otimes {}^T(\nabla_U \eta)$ とすると、

$$\nabla_W^2 \hat{\eta} - B = {}^T(\nabla_W G) \nabla_U^2 \eta(U) \nabla_W G$$

となるので、

$${}^T X(\nabla_W^2 \hat{\eta} - B)X = {}^T Y \nabla_U^2 \eta(U) Y \quad (Y = (\nabla_W G)X)$$

となる。よって、$|\nabla_W G| \neq 0$ であるから、$(\nabla_W^2 \hat{\eta} - B)$ が正定値 (負定値) であることと、$\nabla_U^2 \eta$ が正定値 (負定値) であることは同値となる。ただし、一般には $B \not\equiv 0$ なので、$\nabla_W^2 \hat{\eta}$ と $\nabla_U^2 \eta$ が対応するわけではない。

今度は、$U = {}^T(\rho, m, E)$, $W = {}^T(\rho, u, P)$ に対して $B$ を計算してみる。

$$\nabla_W G = \left( \frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial P} \right) \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho u^2/2 + P/(\gamma - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \\ u^2/2 & \rho u & 1/(\gamma - 1) \end{bmatrix}$$

であり、また定義より

$$\begin{aligned} B &= \nabla_W \, {}^T(\nabla_W G) \otimes {}^T(\nabla_U \eta) \\ &= \left( \frac{\partial \, {}^T(\nabla_W G)}{\partial \rho} \, {}^T(\nabla_U \eta), \frac{\partial \, {}^T(\nabla_W G)}{\partial u} \, {}^T(\nabla_U \eta), \frac{\partial \, {}^T(\nabla_W G)}{\partial P} \, {}^T(\nabla_U \eta) \right) \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \, {}^T(\nabla_W G)}{\partial \rho} &= {}^T\left\{ \frac{\partial \, (\nabla_W G)}{\partial \rho} \right\} = {}^T\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \, {}^T(\nabla_W G)}{\partial u} &= {}^T\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ u & \rho & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & u \\ 0 & 0 & \rho \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial \, {}^T(\nabla_W G)}{\partial P} &= 0 \end{aligned}$$

となる。$\nabla_U \eta = (\eta_\rho, \eta_m, \eta_E)$ なので、よって、

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \eta_m + u\eta_E & 0 \\ \eta_m + u\eta_E & \rho\eta_E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。ここで、$\nabla_W \hat{\eta} = \nabla_U \eta \nabla_W G$ より、

$$\hat{\eta}_u = \rho\eta_m + \rho u \eta_E, \quad \hat{\eta}_P = \frac{1}{\gamma - 1}\eta_E$$

なので、

$$\eta_m + u\eta_E = \frac{1}{\rho}\hat{\eta}_u, \quad \eta_E = (\gamma - 1)\hat{\eta}_P$$

となり、よって $B$ を $\hat{\eta}$ で表わせば、

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\eta}_u/\rho & 0 \\ \hat{\eta}_u/\rho & (\gamma - 1)\rho\hat{\eta}_P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。

次に、具体的な $\hat{\eta} = \rho S$ に対して、$\nabla_W^2 \hat{\eta} - B$ を求める。(C.3) より、

$$\hat{\eta} = \rho S = \rho S_0 + k\rho \log P - k\gamma\rho\log\rho \quad \left(k = \frac{c_v}{\alpha}\right)$$

と書けるから、

$$\nabla_W \hat{\eta} = (\hat{\eta}_\rho, \hat{\eta}_u, \hat{\eta}_P) = \left(S_0 + k\log P - k\gamma\log\rho - k\gamma,\ 0,\ \frac{k\rho}{P}\right)$$

となり、よって、

$$\nabla_W^2 \hat{\eta} = \begin{bmatrix} -k\gamma/\rho & 0 & k/P \\ 0 & 0 & 0 \\ k/P & 0 & -k\rho/P^2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k(\gamma - 1)\rho^2/P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となり、よって、

$$\nabla_W^2\hat{\eta} - B = \begin{bmatrix} -k\gamma/\rho & 0 & k/P \\ 0 & k(\gamma-1)\rho^2/P & 0 \\ k/P & 0 & -k\rho/P^2 \end{bmatrix}$$

となる。今、$X = {}^T(x, y, z)$ に対して、

$$\begin{aligned} {}^TX(\nabla_W^2\hat{\eta} - B)X &= -\frac{k\gamma}{\rho}x^2 + 2\frac{k}{P}xz - k(\gamma-1)\frac{\rho^2}{P}y^2 - \frac{k\rho}{P^2}z^2 \\ &= -\frac{k\rho}{P^2}\left(z - \frac{P}{\rho}x\right)^2 - \frac{k(\gamma-1)}{\rho}x^2 - k(\gamma-1)\frac{\rho^2}{P}y^2 \end{aligned}$$

となるので、$\gamma > 1$ より、これは確かに 0 以下で、しかもこれが 0 になるのは

$$z - \frac{P}{\rho}x = x = y = 0$$

となるときのみで、これは $X = 0$ を意味するから、結局、$X \neq 0$ ならば

$${}^TX(\nabla_W^2\hat{\eta} - B)X < 0$$

であることが言え、よって $\nabla_W^2\hat{\eta} - B$ が負定値であることが言える。ゆえに $\nabla_U^2\eta$ は負定値となり、$\rho S$ が凹であることが言える。

# 参考文献

[1] 竹野茂治、「非線形偏微分方程式入門— 1 次元移流方程式を使って —」、2002.

[2] J.A.Smoller, "*Shock waves and reaction-diffusion equations*", 2nd ed. Springer, 1994.

[3] R.Courant and K.O.Friedrichs, "Supersonic flow and shock waves", Springer, 1991 (original edition: Interscience, 1948).

[4] 西田孝明、川島秀一、「気体の運動方程式」(山口昌哉編、「非線型の現象と解析」、日本評論社)、p135-160, 1996.

[5] P.D.Lax, Hyperbolic systems of conservation laws II, Comm.Pure Appl.Math. **10**, p537-566, 1957.

[6] 浅倉史興、「双曲型保存則系の初期値問題— 基本結果と近年の話題 —」、「数学」第 52 巻 3 号 (日本数学会) p257-278, 2000.

[7] R. クーラン、D. ヒルベルト (齋藤利弥監訳、筒井孝胤訳)、「数理物理学の方法 4」、東京図書、1968.