2009 年 01 月 25 日

粘性近似解の一様減衰評価に関するノート

新潟工科大学 情報電子工学科 竹野茂治

1 はじめに

本稿は、保存則方程式

$$u_t + f(u)_x = 0 \tag{1}$$

の解の減衰について考える。ここで $u = u(t,x)$ は、一般には N 次元の値を取る、$t > 0$, $x \in R$ の 2 変数関数で、$f(u)$ は u に関して C^2 であるとする。

方程式 (1) は、解が不連続性を持ちうる (衝撃波として知られている) ので、解の存在を示すには、何らかの近似解、例えば人工粘性方程式

$$u_t + f(u)_x = \varepsilon u_{xx} \tag{2}$$

($\varepsilon > 0$) の解などを構成し、その極限 ($\varepsilon \to +0$) として (1) の解 (弱解) を得るのが普通であり、そのような方法も、Glimm 差分や波面追跡法 (front tracking method) など、何通りか知られている。

減衰性のような解の性質を、直接 (1) を扱う代わりに (2) の解の性質の極限として得るには、ε によらない一様な性質が必要となる。解の減衰等の研究は、(2) よりもむしろ Glimm 差分や波面追跡法などによる研究の方が進んでいるが、ここでは、補償コンパクト性理論 (compensated compactness theory) で使用される (2) による近似解について考察する。

なお本稿は、議論のアウトラインに関するノートであるため、厳密さを欠いたような説明や、必要な条件を精密に表現しないような説明も含まれるので注意してもらいたい。

2 単独保存則のリーマン問題の解とエントロピー条件

本稿ではしばらく $N=1$、すなわち単独の保存則方程式について考える。$f(u)$ も通常の凸なものを考えることとし、ある正の定数 δ に対して

$$f''(u)\geq\delta \tag{3}$$

が成り立つとする。

非粘性の保存則方程式 (1) は、良く知られているように衝撃波と呼ばれる不連続解

$$u(t,x)=\begin{cases} u_1 & (x<st),\\ u_2 & (x>st)\end{cases} \tag{4}$$

を持つ。ここで、s は、Rankine-Hugoniot 条件

$$f(u_2)-f(u_1)=s(u_2-u_1)$$

を満たす必要があるが、さらに Lax のエントロピー条件

$$f'(u_1)>s>f'(u_2)$$

をも満たさなければいけないので、ここから $u_1>u_2$ が自然に導かれる。

よってこれは、右 (x 軸方向) に向かって下がる階段関数の初期値に対する解であるが、逆に右に向かって上がる階段関数の初期値に対する解は、膨張波と呼ばれる、区分的に C^2 な、$t>0$ で連続な関数

$$u(t,x)=\begin{cases} u_1 & (x<at),\\ \hat{u}\left(\dfrac{x}{t}\right) & (at\leq x\leq bt),\\ u_2 & (x>bt)\end{cases} \tag{5}$$

となる。ここで $\hat{u}(\xi)$ は、

$$\hat{u}(\xi)=(f')^{-1}(\xi)$$

である。膨張波は、x 方向に徐々に広がっていく関数であり、$\hat{u}'(\xi)$ は (3) より

$$0 < \hat{u}'(\xi) = \frac{1}{f''(\hat{u}(\xi))} \leq \frac{1}{\delta}$$

と有界なので、この波の内部では

$$0 < u_x = \hat{u}'\left(\frac{x}{t}\right)\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\delta t}$$

となり、u_x は $1/t$ の速さで減衰する。一方で、衝撃波ではもちろん $u_x = -\infty$ であるから、(1) の解の u_x を下からおさえることはできない。よって、その近似解である (2) の解も ε に一様に u_x を下からおさえることはできないと思われる。

一般に、単独の保存則方程式 (1) は Oleinik のエントロピー条件

$$\frac{u(t,x+p)-u(t,x)}{p} \leq \frac{M}{t} \tag{6}$$

(p は任意の正数、M はある正数) を満たす解を持つ。これは、おおまかに言って、解の u_x が $1/t$ の速さで「上から」おさえられることを意味する。

本稿では (6) にならい、$N=1$ の場合に (2) の近似解が、ε に関して一様に u_x が上から $1/t$ の速さの評価を持つことを示し、それを用いて u の一様な減衰評価を求める。

なお、(2) は放物型方程式なので、その解は $1/t$ より速く (例えば指数的に) 減衰することが期待される。確かに (2) の解 u はそのような評価も持つが、上の考察によってもわかるようにそれは ε に依存した評価であり、$\varepsilon \to +0$ のときには保持されず、ε に一様には成り立たない。

つまり、見た目には速く減衰する近似解から、ε に一様な遅い減衰成分を取り出すことが目標となる。

3 CCS の方法

この節では、$N=1$ の場合の (2) の解 u の u_x の評価を得るのに用いる Chueh-Conley-Smoller の方法 ([1],[2] 参照。以後簡単に「CCS の方法」と言うこととする) について説明する。まずは直接 u に CCS の方法を適用する例を紹介する。

なお本稿では、初期値に関して次の 2 つの問題を考えることにする。

問題 1 初期値が x の遠方で 0 に十分速く減衰している場合。

$$\lim_{|x|\to\infty} u(0,x) = 0 \tag{7}$$

この場合は、$u(0,x)$ が適当な可積分空間に属するとし、必要ならば $u(0,x)$ の微分も同様の評価を持つとする。

問題 2 初期値が x に関して周期的である場合。ある正数 L があって、すべての x に対し、

$$u(0,x+L) = u(0,x) \tag{8}$$

これら初期値は十分滑らかであるとすると、(2) の解 $u = u(t,x)$ も十分に滑らかとなり、そして $t > 0$ に対して $u = u(t,x)$ も問題 1, 2 のそれぞれで x の遠方に減衰、あるいは x に関して周期的 (同じ周期を持つ) となる。

今、初期値 $u(0,x)$ の下限を u_m, 上限を u_M とする。

$$u_m \le u(0,x) \le u_M \tag{9}$$

$t_0 > 0$ に対して $u(t_0,x)$ を x の関数として考えると、これが $x = x_0$ で極大になるとすると、

$$u_x(t_0,x_0) = 0, \quad u_{xx}(t_0,x_0) \le 0 \tag{10}$$

となる。よって、その点では (2) より

$$u_t(t_0,x_0) = -f'(u(t_0,x_0))u_x(t_0,x_0) + \varepsilon u_{xx}(t_0,x_0) = \varepsilon u_{xx}(t_0,x_0) \le 0$$

となる。(10) より、これは t が増加するどの方向にも言えて、すなわち任意の α に対し

$$\left.\frac{d}{dt}u(t,x_0+\alpha(t-t_0))\right|_{t=t_0} = u_t(t_0,x_0) + \alpha u_x(t_0,x_0) = u_t(t_0,x_0) \le 0$$

となる。つまり、極大点から t に関しての先に向かっては $u(t,x)$ の値は増加することはないことになる。

同様に、$x=x_0$ が極小点の場合は

$$u_x(t_0,x_0)=0,\quad u_{xx}(t_0,x_0)\geq 0 \tag{11}$$

となるので、

$$u_t(t_0,x_0)=-f'(u(t_0,x_0))u_x(t_0,x_0)+\varepsilon u_{xx}(t_0,x_0)=\varepsilon u_{xx}(t_0,x_0)\geq 0$$

となり、$u(t,x)$ はこの先に向かって減少することはないことになる。

問題 1 の場合も問題 2 の場合も、最大値、最小値は境界ではなく内部で取ることになるので、そこでは極大、極小となるから、上の議論によりそこで t の増える方向に向かって増加、減少はできないことになる。

よって、$u(t,x)$ の値は上には u_M を、下には u_m を超えることはできないので、次が成り立つことになる。

定理 1

初期値の (9) の仮定の元、問題 1, 2 に対する (2) の解 $u(t,x)$ は、ε に一様に

$$u_m\leq u(t,x)\leq u_M$$

を満たす。

以上が CCS の方法である。

4 一階微分の評価

3 節の方法では、u の一様な有界評価は得られるが、減衰評価までは得られない。この節では、同じ CCS の方法を利用して、2 節で予告した u_x の「上からの」評価を導く。

方程式 (2) を x で微分すると、

$$u_{tx}+f'(u)u_{xx}+f''(u)u_x^2=\varepsilon u_{xxx}$$

となるので、$v=u_x$ とすれば

$$v_t+f'(u)v_x+f''(u)v^2=\varepsilon v_{xx} \tag{12}$$

となる。これに CCS の方法を用いる。

問題 1 の場合も 2 の場合も、$v=u_x$ はすべての $t\geq 0$ に対して正の値も負の値も取ることになるので、$v(t_0,x)$ の x に関する最大値 $V(t_0)$ は正の値であり、その最大値 $V(t_0)$ はある $x=x_0$ で取られる。

よって $x=x_0$ では $v(t_0,x)$ は極大にもなっているので、

$$v_x(t_0,x_0)=0,\quad v_{xx}(t_0,x_0)\leq 0 \tag{13}$$

となり、よって、そこでは (12)、および (3) より

$$\begin{aligned} v_t(t_0,x_0) &= -f'(u(t_0,x_0))v_x(t_0,x_0)-f''(u(t_0,x_0))v(t_0,x_0)^2+\varepsilon v_{xx}(t_0,x_0)\\ &\leq -\delta v(t_0,x_0)^2 \end{aligned} \tag{14}$$

となる。

$t=t_1$ から $t=t_2$ $(t_1<t_2)$ までの間、$v(t,x)$ の x に関する最大値 $V(t)$ を取る場所 (山の尾根の部分) が $x=x(t)$ という曲線であらわされるとすると、$(t,x(t))$ で (13), (14) が成り立つことから

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{d}{dt}v(t,x(t))=v_t(t,x(t))+v_x(t,x(t))x'(t)=v_t(t,x(t))\\ &\leq -\delta v(t,x(t))^2=-\delta V(t)^2 \end{aligned}$$

となる。$V(t)>0$ なので、これを変形して

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{V(t)}\right)\geq\delta$$

とし、これを t_1 から t_2 まで積分すれば、

$$\frac{1}{V(t_2)} - \frac{1}{V(t_1)} \geq \delta(t_2 - t_1) \tag{15}$$

が得られる。

よって、0 から t までを考えると、最大値を与える x が上のようには一本の曲線では表されない場合でも、0 から t までを、V を与える x がそのそれぞれで一本の曲線で表されるような小さい区間に分け、そのそれぞれに対する評価式 (15) をすべて加えれば、結局

$$\frac{1}{V(t)} - \frac{1}{V(0)} \geq \delta t$$

が成り立つことが示されるので、よって

$$V(t) \leq \frac{1}{\delta t + 1/V(0)} \leq \frac{1}{\delta t}$$

が言える。これで、u_x の上からの $1/t$ の評価が得られた。

定理 2

問題 1, 2 に対する (2) の解 $u(t,x)$ は、ε に一様に

$$u_x(t,x) \leq \frac{1}{\delta t}$$

を満たす。

なおこの評価は、$u(0,x)$ にはよらない形になっている。

5 空間周期的な場合の減衰評価

この節では、問題 2 の空間周期的な解 u の時間方向の減衰を考える。

まず、

$$\bar{u} = \frac{1}{L}\int_0^L u(t,x)dx$$

は t によらない定数であることに注意する。それは、(2)、および u (よってもちろん u_x も) の周期性により

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^L u(t,x)dx = \int_0^L u_t(t,x)dx = \int_0^L (-f(u)_x + \varepsilon u_{xx})\,dx \\ = \ [-f(u) + \varepsilon u_x]_{x=0}^{x=L} = 0\end{aligned}$$

となるからである。この $\bar{u}$ は u の平均値であり、$u(t,x)$ はこの $\bar{u}$ に向かって減衰する。ここでは、定理 2 を用いてそれを示す。

$u(t,x)$ は滑らかであり $\bar{u}$ は平均値であるから、各 t に対して $u(t,x_0) = \bar{u}$ となる $x_0 \in [0,L)$ が存在する。よって、$x \in [0,L]$ に対して、

$$|u(t,x) - \bar{u}| = |u(t,x) - u(t,x_0)| = \left|\int_{x_0}^x u_x(t,y)dy\right| \leq \int_0^L |u_x(t,x)|dx \tag{16}$$

となる。

今、$u_x(t,x)$ の正の部分を $v_+(t,x)$、負の部分を $v_-(t,x)$ とする。

$$v_+(t,x) = \max\{0, u_x(t,x)\}, \quad v_-(t,x) = \max\{0, -u_x(t,x)\} \tag{17}$$

すると、

$$u_x(t,x) = v_+(t,x) - v_-(t,x), \quad |u_x(t,x)| = v_+(t,x) + v_-(t,x)$$

であり、u の周期性により

$$\int_0^L u_x(t,x)dx = [u(t,x)]_{x=0}^{x=L} = 0$$

なので、

$$\int_0^L v_+(t,x)dx = \int_0^L v_-(t,x)dx, \quad \int_0^L |u_x(t,x)|dx = 2\int_0^L v_+(t,x)dx \tag{18}$$

が言える。定理 2 により

$$v_+(t,x) = \max\{0, u_x(t,x)\} \le \frac{1}{\delta t} \tag{19}$$

であるので、(16), (18), (19) より

$$|u(t,x) - \bar{u}| \le \int_0^L |u_x(t,x)| dx = 2\int_0^L v_+(t,x) dx \le \frac{2L}{\delta t}$$

が得られる。

定理 3

問題 2 の場合、(2) の解 u は ε に一様に次の減衰評価を満たす。

$$|u(t,x) - \bar{u}| \le \frac{2L}{\delta} t^{-1} \tag{20}$$

6 空間遠方に減衰している場合の減衰評価

この節では、問題 1 の空間遠方に減衰している解 u の時間方向の減衰を考える。

この場合は、$u_0(x) = u(0,x)$ が遠方で十分速く 0 に減衰しているという仮定の元で $u(t,x)$ も 0 に減衰することが示される。しかし、問題 2 の場合とは減衰する速さは異なる。まずは簡単のため、$f(u) = u^2/2$ (いわゆる Burgers 方程式) とし、$u_0 \in L^2(R)$ として考えてみる。

この場合は、

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}$$

なので、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_R u(t,x)^2 dx = \int_R 2uu_t dx = \int_R 2u(-uu_x + \varepsilon u_{xx}) dx \\
&= \int_R \left(-\frac{2}{3}u^3 + 2\varepsilon u u_x\right)_x dx - \int_R 2\varepsilon u_x^2 dx = -\int_R 2\varepsilon u_x^2 dx \\
&\le 0
\end{aligned}$$

となり、よって $u(t,x)$ の x に関する L^2 の評価

$$\int_R u(t,x)^2 dx \le \int_R u(0,x)^2 dx = \|u_0\|_{L^2}^2 < \infty \tag{21}$$

が得られる。5 節と同様に v_+, v_- を用いれば

$$\int_R u^2 u_x dx = \int_R \left(\frac{u^3}{3}\right)_x dx = 0$$

より

$$\int_R u^2 v_+ dx = \int_R u^2 v_- dx, \quad \int_R u^2 |u_x| dx = 2\int_R u^2 v_+ dx \tag{22}$$

となるので、(21), (22), および定理 2 により、

$$\begin{aligned} |u(t,x)^3| &= |u(t,x)^3 - u(t,-\infty)^3| \le \int_R \left|\left(u(t,x)^3\right)_x\right| dx = 3\int_R u^2 |u_x| dx \\ &= 6\int_R u^2 v_+ dx \le \frac{6}{\delta t}\int_R u^2 dx \le \frac{6}{\delta t}\|u_0\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

が得られる。ここから、u の $t^{-1/3}$ の評価

$$|u(t,x)| \le C_2\, t^{-1/3} \quad \left(C_2 = \left(\frac{6}{\delta}\right)^{1/3} \|u_0\|_{L^2}^{2/3}\right) \tag{23}$$

が得られる。

これと同じことを、一般の f で、$u_0 \in L^p(R)$ $(p > 1)$ の場合で考えてみよう。まず、次に注意する。

$$(|x|^q)' = q|x|^{q-2}x, \quad (|x|^{q-1}x)' = q|x|^{q-1} \quad (q > 1) \tag{24}$$

これらは、

$$(|x|)' = \frac{x}{|x|} \quad (x \ne 0)$$

より、

$$\begin{aligned}
(|x|^q)' &= q|x|^{q-1}(|x|)' = q|x|^{q-2}x, \\
(|x|^{q-1}x)' &= (q-1)|x|^{q-2}(|x|)'x + |x|^{q-1} = (q-1)|x|^{q-2}\frac{x^2}{|x|} + |x|^{q-1} \\
&= (q-1)|x|^{q-1} + |x|^{q-1} = q|x|^{q-1}
\end{aligned}$$

として得られる。

$|u|$ の p 乗の積分を t で微分すると、(24) より

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_R |u|^p dx = \int_R p|u|^{p-2}uu_t dx \\
&= -\int_R p|u|^{p-2}uf'(u)u_x dx + \int_R \varepsilon p|u|^{p-2}uu_{xx}dx
\end{aligned} \tag{25}$$

となるが、今

$$F(w) = \int_0^w p|u|^{p-2}uf'(u)du \tag{26}$$

とすれば、$p > 1$ より F は C^1 級で、よって

$$\int_R p|u|^{p-2}uf'(u)u_x dx = \int_R F'(u)u_x dx = \int_R F(u)_x dx = 0 \tag{27}$$

となる。また、(24) より、

$$\begin{aligned}
\varepsilon p|u|^{p-2}uu_{xx} &= \varepsilon p\left(|u|^{p-2}uu_x\right)_x - \varepsilon p\left(|u|^{p-2}u\right)_x u_x \\
&= \varepsilon p\left(|u|^{p-2}uu_x\right)_x - \varepsilon p(p-1)|u|^{p-2}u_x^2 \le \varepsilon p\left(|u|^{p-2}uu_x\right)_x
\end{aligned} \tag{28}$$

となるので、

$$\int_R \varepsilon p|u|^{p-2}uu_{xx}dx \le \int_R \varepsilon p\left(|u|^{p-2}uu_x\right)_x dx = 0 \tag{29}$$

となる。結局 (25), (27), (29) より

$$\frac{d}{dt}\int_R |u|^p dx \le 0$$

が得られるから、$|u|$ の p 乗積分は、

$$\int_R |u(t,x)|^p dx \leq \int_R |u(0,x)|^p dx = \|u_0\|_{L^p}^p \tag{30}$$

と評価される。これは $p=2$ の場合の (21) に対応する。

そして、(24) より、

$$\begin{aligned} |u(t,x)|^{p+1} &= ||u|^p u| = |(|u|^p u)(t,x) - (|u|^p u)(t,-\infty)| \\ &\leq \int_R \left|(|u|^p u)_x\right| dx = \int_R (p+1)|u|^p |u_x| dx \end{aligned} \tag{31}$$

となるが、$p>1$ に対して (24) より、

$$\int_R |u|^p u_x dx = \int_R \frac{1}{p+1}(|u|^p u)_u u_x dx = \int_R \frac{1}{p+1}(|u|^p u)_x dx = 0$$

なので、$p=2$ の場合と同様にして

$$\int_R |u|^p v_+ dx = \int_R |u|^p v_- dx, \quad \int_R |u|^p |u_x| dx = 2\int_R |u|^p v_+ dx$$

となり、よって (30) と定理 2 より、

$$\int_R |u|^p |u_x| dx = 2\int_R |u|^p v_+ dx \leq \frac{2}{\delta t}\int_R |u|^p dx \leq \frac{2}{\delta t}\|u_0\|_{L^p}^p$$

と評価できる。よって、(31) より

$$|u(t,x)|^{p+1} \leq \frac{2}{\delta t}(p+1)\|u_0\|_{L^p}^p$$

となり、結局 u の $t^{-1/(p+1)}$ の評価

$$|u(t,x)| \leq C_p t^{-1/(p+1)} \quad \left(C_p = \left\{ \frac{2(p+1)}{\delta t} \right\}^{1/(p+1)} \|u_0\|_{L^p}^{p/(p+1)} \right) \tag{32}$$

が得られる。

また、特に $u_0(x)=u(0,x)$ がコンパクト台を持つ関数の場合は、すべての $p>1$ に対し $u_0\in L^p(R)$ となるので、(32) で $p\to 1+0$ とすれば、

$$C_p \to \sqrt{\frac{4}{\delta}\|u_0\|_{L^1}} = C_1$$

となり、u の $t^{-1/2}$ の評価

$$|u(t,x)| \le C_1\,t^{-1/2}$$

が得られる。

定理 4

問題 1 の場合、$u(0,x)\in L^p(R)$ $(p>1)$ のときは、(2) の解 u は ε に一様に次の減衰評価を満たす。

$$|u(t,x)| \le C_p\,t^{-1/(p+1)} \tag{33}$$

さらに $u(0,x)$ がコンパクト台を持つ場合は

$$|u(t,x)| \le C_1\,t^{-1/2} \tag{34}$$

が成り立つ (C_p は p, δ, $\|u_0\|_{L^p}$ による定数)。

初期値がコンパクト台を持つ場合の $t^{-1/2}$ という評価は、コンパクトな台を持つ N 型波の漸近挙動に対応し、よって $t^{-1/2}$ より強い評価を期待することはできない (詳細は、例えば [1] 参照)。

なお、$t^{-1/2}$ の評価を得るために (25) を直接 $p=1$ としようとすると、

$$\frac{d}{dt}|u| = \frac{u}{|u|}u_t$$

は $u\neq 0$ でしか成り立たないため、$u=0$ での例外的な議論が入って難しくなる。さらに (26) の F も C^1 ではなくなるし、(28) も $p=1$ ではそのままは成立しない。つ

まり $p=1$ では上のような議論が直接は使えないので、ここでは $p\to 1+0$ として考えた。しかし $p=1$ でも似たような考察が行えないわけではない。それについては付録として 8 節に記すこととする。

また、この節では、$G(0)=0$ なる C^1 級の関数 $G(u)$ に対して、

$$\int_R G(u)_x dx = 0$$

なる論法を何回か用いた。これが成り立つためには、もちろん $u(t,x)$ にそれなりの速さでの x の遠方での減衰性や微分の可積分性などが必要になる (詳しくは [3] 参照) が、我々の問題では元々考えている u は (1) に対する近似解なので、必要ならば初期値も x の遠方では十分早く減衰するもので近似しておくことができ、それほど問題とはならない (多分)。

7 連立方程式の場合

次に、連立方程式の場合を考えてみよう。ここでは、等エントロピー気体の方程式

$$u=\begin{bmatrix}\rho\\ m\end{bmatrix},\quad f(u)=\begin{bmatrix}m\\ m^2/\rho+P(\rho)\end{bmatrix}\quad (P(\rho)=A\rho^\gamma,\ 1<\gamma<3)$$

を考える。この場合、よく知られているように (詳しくは [1],[3],[4] 参照)、

$$u(0,x)=\begin{cases}u_1 & (x<0),\\ u_2 & (x>0)\end{cases}$$

を初期値とする初期値問題 (Riemann 問題と呼ばれる) の解は、1-wave と 2-wave の 2 つの波からなり、そのそれぞれが衝撃波か膨張波となる。(ρ,m) の代わりに Riemann 不変量

$$w=\frac{m}{\rho}+\frac{2\sqrt{A}}{\gamma-1}\rho^{(\gamma-1)/2},\quad z=\frac{m}{\rho}-\frac{2\sqrt{A}}{\gamma-1}\rho^{(\gamma-1)/2} \tag{35}$$

で考えると、詳細は略すが、

- 1-膨張波では $w(\hat{u}(\xi)) =$ 一定、$z(\hat{u}(\xi))_\xi > 0$
- 2-膨張波では $z(\hat{u}(\xi)) =$ 一定、$w(\hat{u}(\xi))_\xi > 0$
- 1-衝撃波では $w(u_1) > w(u_2)$, $z(u_1) > z(u_2)$
- 2-衝撃波では $w(u_1) > w(u_2)$, $z(u_1) > z(u_2)$

となる。よってこれらの波に関して ($t = 0$ に始点がある波の場合)、w, z の x での微分は、

- 1-膨張波では $w_x = 0$, $0 < z_x \leq C/t$
- 2-膨張波では $z_x = 0$, $0 < w_x \leq C/t$
- 1-衝撃波では $w_x = -\infty$, $z_x = -\infty$
- 2-衝撃波では $w_x = -\infty$, $z_x = -\infty$

となる。

よって、この場合も一見 w, z は上から $1/t$ のような評価を持つように見える。実際この場合の u の有界性は、3 節のようにして w の極大点で w が増加しないこと、z の極小点で z が減少しないことを示すことで得られる。

しかし連立方程式の場合は $t > 0$ でも膨張波の始点が現われうるという問題がある。例えば、ある 2-衝撃波に、それより左にある 2-衝撃波が追いつくと、その衝突点で (弱い) 1-膨張波と 1 つの 2-衝撃波が生成される。その膨張波はその始点が衝突時刻 $t = t_0$ (> 0) にあるので、その $t = t_0$ で z_x は $+\infty$ になってしまう。同様に 1-衝撃波同士の衝突により、(弱い) 2-膨張波が現われ、そこで $w_x = +\infty$ となってしまう。

単独の方程式の場合は、衝撃波同士の衝突では、その合成の衝撃波ひとつしか生まれず、このようなことは起きない。よって膨張波の始点も $t = 0$ のみにしかなく、Oleinik のエントロピー条件 (6) が成り立つのであるが、連立方程式の場合はそうはいかず、このような不等式は w, z に対しては成立し得ない。

では、w, z はだめだとして、他に x での微分が上からおさえられるような u の関数はないだろうか。u の関数は (35) より w, z の関数と表すこともできるが、今それを $h(w, z)$ とすると、この関数の x に関する微分は

$$h(w, z)_x = h_w w_x + h_z z_x$$

となる。よって、上に述べた $t>0$ で起こる 1-膨張波を考えると、

$$h(w,z)_x = h_w w_x + h_z z_x = h_z z_x = h_z \times +\infty$$

となるので、これを上からおさえるには、$h_z \leq 0$ でなくてはならない。同様に、2-膨張波のことを考えると $h_w \leq 0$ でなくてはならない。

しかし、$h_z \leq 0$, $h_w \leq 0$ では、衝撃波のことを考えると、$h_z \equiv 0$, $h_w \equiv 0$ でない限り上から押さえることはできなくなる。よって、w, z の関数でも、x の微分を上からおさえられるようなものは定数以外には存在しないことになる。

つまり、連立方程式の場合は、本稿で説明しているような、「x での微分を片側からおさえる」ことによる ε に一様な評価を得る方法は無理だということになる。

8 可積分な初期値について

この節では、付録として、6 節の最後に述べた、$N=1$ で初期値が可積分な場合の一様な評価 $t^{-1/2}$ を、$p \to 1+0$ の極限としてではなく直接得るための計算を考えてみる。

そこで述べたように、この場合は

$$\frac{d}{dt}\int_R |u|dx \leq 0$$

を示してそれを積分する、というわけにはいかないので、最初から微分を積分の中に入れた形で考える。ただし、絶対値のついた関数の微分を考えるために、右からの微分係数 D^+ を用いる。

補題 5

$f(x)$ が C^1 級のとき、

$$D^+|f(x)| = \lim_{h\to+0}\frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h} = \begin{cases} \dfrac{f(x)}{|f(x)|}f'(x) & (f(x)\neq 0), \\ |f'(x)| & (f(x)=0) \end{cases} \tag{36}$$

証明

$f(x) > 0,\ f(x) < 0$ の場合は、それぞれ x の近くでも $f > 0,\ f < 0$ であるから (36) は明らか。

$f(x) = 0$ の場合は、

$$D^{+}|f(x)| = \lim_{h\to+0} \frac{|f(x+h)|}{h} = \lim_{h\to+0} \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| = |f'(x)|$$

となる。■

補題 6

$f(x)$ が $a \leq x \leq b+c\ (c>0)$ で C^1 級のとき、

$$\int_a^b D^{+}|f(x)|dx = |f(b)| - |f(a)|$$

証明

$h > 0,\ a \leq x \leq b$ に対して

$$\left|\frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h}\right| \leq \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| \leq \max_{[a,b+c]} |f'(x)| < \infty$$

なので、Lebesgue 収束定理により

$$\lim_{h\to+0} \int_a^b \frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h} dx = \int_a^b D^{+}|f(x)|dx$$

となる。一方、$h \to +0$ のとき、

$$\int_a^b \frac{|f(x+h)|-|f(x)|}{h} dx = \frac{1}{h}\int_b^{b+h} |f(x)|dx - \frac{1}{h}\int_a^{a+h} |f(x)|dx \to |f(b)| - |f(a)|$$

となる。■

この補題 6 によって、任意の $T>0$ に対し、

$$\int_R dx \int_0^T D_t^+|u(t,x)|dt = \int_R |u(T,x)|dx - \int_R |u(0,x)|dx \tag{37}$$

が成り立つ。ここで、

$$I = \int_R D_t^+|u(t,x)|dx$$

の積分範囲を、

$$\{x;\ u(t,x)\neq 0\},\quad \{x;\ u(t,x)=0\}$$

の 2 つに分けると、補題 5 より、

$$\begin{aligned} I &= \int_{u\neq 0} \frac{u}{|u|}u_t dx + \int_{u=0} |u_t|dx \\ &= \int_{u\neq 0} \frac{u}{|u|}(-f'(u)u_x + \varepsilon u_x x)dx + \int_{u=0} |-f'(0)u_x + \varepsilon u_x x|dx \end{aligned} \tag{38}$$

となる。まず、$\{x;\ u=0\}$ 上の積分であるが、これは次の補題 7 により 0 となることがわかる。

補題 7

$f(x)$ が C^k 級 $(k\geq 1)$ のとき、

$$D_1 = \{x;\ f(x)=0 \text{ かつ } f^{(k)}(x)\neq 0\}$$

は高々加算集合。

この補題 7 は、次の補題 8 により得られる。

補題 8

$f(x)$ が C^k 級 $(k \geq 1)$ のとき、任意の $a > 0$ に対して、

$$D_2(a) = \{x;\ f(x) = 0 \text{ かつ } |f^{(k)}(x)| \geq a\}$$

は集積点を持たない。

この補題 8 が言えれば、$D_2(a)$ は離散的なので高々可算集合となり、よって

$$D_1 = \bigcup_{n \in N} D_2\left(\frac{1}{n}\right)$$

も高々可算集合であることが言え、補題 7 が成り立つことになる。

この補題 8 は、以下のようにして示される。今、$x_n \in D_2(a)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ がすべて異なる点列で、$x_n \to p$ であるとする。このとき、

$$f(x_n) = 0, \quad |f^{(k)}(x_n)| \geq a$$

なので、その極限においても

$$f(p) = 0, \quad |f^{(k)}(p)| \geq a$$

となり、よって $p \in D_2(a)$ となる。

ところで、$f(p) = 0$ とロピタルの定理により、

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{x - p} = f'(p)$$

となるが、$x = x_n$ に対しては

$$\frac{f(x_n)}{x_n - p} = 0$$

なので、よって $f'(p) = 0$ となる。そしてこれにより、再びロピタルの定理により、

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{(x - p)^2} = \lim_{x \to p} \frac{f''(x)}{2} = \frac{f''(p)}{2}$$

となるが、$x = x_n$ においてはやはり

$$\frac{f(x_n)}{(x_n - p)^2} = 0$$

なので、$f''(p) = 0$ となる。これを繰り返して結局 $f^{(k)}(p) = 0$ が得られるが、これは $|f^{(k)}(p)| \geq a$ に矛盾する。よって $D_2(a)$ は集積点を持たない。

結局 $\{x;\ u = 0\}$ 上の積分は 0 となるので、(38) より

$$I = -\int_{u\neq 0} \frac{u}{|u|} f'(u) u_x dx + \varepsilon \int_{u\neq 0} \frac{u}{|u|} u_{xx} dx \tag{39}$$

となる。この最初の積分は、

$$\begin{aligned}\int_{u\neq 0} \frac{u}{|u|} f'(u) u_x dx &= \int_{u\neq 0} \frac{u}{|u|} (f'(u) - f'(0)) u_x dx + f'(0) \int_{u\neq 0} \frac{u}{|u|} u_x dx \\ &= \int_{u\neq 0} H(u)_x dx + f'(0) \int_{u\neq 0} |u|_x dx \end{aligned} \tag{40}$$

と変形できる。ここで $H(u)$ は、

$$H(w) = \int_0^w \frac{u}{|u|} (f'(u) - f'(0)) du$$

で定義される C^1 級の関数である。

今、u は x に関して連続なので $\{x;\ u(t,x) \neq 0\}$ は開集合であるが、その連結成分は開区間であり、それらは高々可算個で共通部分を持たず、

$$\{x;\ u(t,x) \neq 0\} = \bigcup_n (a_n, b_n)$$

と書ける。各区間 (a_n, b_n) では u は正、または負のいずれかであり、

$$u(t, a_n) = u(t, b_n) = 0 \tag{41}$$

となる。$a_n = -\infty$, あるいは $b = \infty$ の場合も u は遠方で 0 に収束するから、その場合も (41) は成り立つと見ることができる。よって、

$$\int_{u\neq 0} H(u)_x dx = \sum_n \int_{a_n}^{b_n} H(u)_x dx = \sum_n [H(u)]_{a_n}^{b_n} = 0$$

となる。$|u|_x$ の積分の方も同様に 0 となる (u, u_x に適当な減衰性があるという仮定の元)。よって、I は

$$I = \varepsilon\int_{u\neq 0}\frac{u}{|u|}u_{xx}dx = \varepsilon\int_{u>0}u_{xx}dx - \varepsilon\int_{u<0}u_{xx}dx$$

のみが残ることとなるが、この積分は (u_{xx} も可積分であるとし、遠方での減衰性を仮定すれば)、上と同様に各開区間の積分に分けることができて、

$$\begin{aligned} I &= \varepsilon\int_{u>0}u_{xx}dx - \varepsilon\int_{u<0}u_{xx}dx = \varepsilon\sum_m\int_{c_m}^{d_m}u_{xx}dx - \varepsilon\sum_j\int_{p_j}^{q_j}u_{xx}dx \\ &= \varepsilon\sum_m[u_x]_{c_m}^{d_m} - \varepsilon\sum_j[u_x]_{p_j}^{q_j} \end{aligned} \tag{42}$$

と変形できる。ここで (c_m, d_m) 上では $u > 0$、(p_j, q_j) 上では $u < 0$ で、$u(c_m) = u(d_m) = u(p_j) = u(q_j)$ であるから、

$$u_x(c_m) \geq 0, \quad u_x(d_m) \leq 0, \quad u_x(p_j) \leq 0, \quad u_x(q_j) \geq 0$$

となる。よって、

$$[u_x]_{c_m}^{d_m} \leq 0, \quad [u_x]_{p_j}^{q_j} \geq 0 \tag{43}$$

となるので、よって (42), (43) より $I \leq 0$ が言え、結局 (37) と Fubini の定理により、任意の $T > 0$ に対して

$$\int_R|u(T,x)|dx \leq \int_R|u(0,x)|dx$$

が言えることになる。

これが言えてしまえば後は前と同じで、

$$\begin{aligned} |u(t,x)^2| &= |u(t,x)^2 - u(t,-\infty)^2| \leq 2\int_R|uu_x|dx = 4\int_R|u|v_+dx \\ &\leq \frac{4}{\delta t}\int_R|u|dx \leq \frac{4}{\delta t}\|u_0\|_{L^1} \end{aligned}$$

となり、(34) が得られることになる。

ただしこちらの場合は、それなりに x の遠方に関する減衰性や可積分性は必要とするものの、$p \to 1+0$ の極限を用いないので、初期値がコンパクト台を持つ必要はない。

9 最後に

本稿では、厳密な条件は多少省略して、単独の保存則の減衰を示す方法の概要、およびそれと連立の保存則方程式との関係について紹介した。

もちろん、単独の保存則方程式については、他にも減衰を示す方法はあるが、ここでは、私の個人的な興味で補償コンパクト性理論で用いられる粘性近似解に対する方法を説明した (例えば [5] はそれを Lax-Friedrichs 型の差分に応用した結果である)。本当は、7 節で紹介した連立の保存則方程式に対して減衰評価を示したいのであるが、7 節で述べたようにこの方法のままでは残念ながらうまくいかない。

実は連立保存則方程式に対しては、Glimm の方法等では研究が進んでいるものの、人工粘性近似解に対してはまだあまりちゃんとした結果は得られてはおらず、本稿はそれに対して直接役立つものではないが、この問題を考える人の何らかの参考となり、新たな手法を考えるときの何かのたしにでもなれば、と思っている。

参考文献

[1] J.A.Smoller, "*Shock waves and reaction-diffusion equations.*" 2nd ed., Springer, 1994.

[2] K.N.Chueh, C.C.Conley and J.A.Smoller, "Positively invariant regions for systems of nonlinear diffusion equations", Indiana Univ.Math.J. **26** (1977), 373–392.

[3] 松村昭孝、西原健二「非線形微分方程式の大域解」、日本評論社, 2004.

[4] 竹野茂治「リーマン問題入門」(2007), `http://takeno.iee.niit.ac.jp/~shige/math/conser.html`

[5] S.Takeno, "Time-periodic solutions for a scalar conservation law", Nonlinear Anal. **45** (2001), 1039–1060.