減衰とんちんかん*

－内部減衰系の過渡応答－

門松　晃司[1)]

The Fool on the Damping

Koji KADOMATSU

Key Words: Damping, Vibration, Modeling /Hysteretic Damping, Impulse Response ⑫

1．はじめに

「減衰」にはいくつかの種類・名称がある．粘性減衰，内部減衰，構造減衰，ヒステリシス減衰，材料減衰，クーロン減衰，摩擦減衰，速度二乗減衰など．又，同じ意味でも書物や執筆者により異なる名称が使われており，混乱しがちである．本稿では，複素剛性で定義される減衰を内部減衰と称することにする．ヒステリシス減衰，構造減衰と記載されている書物も多いがすべて同義である．

ここで，内部減衰の損失係数をη，粘性減衰１自由度系の減衰比をζと記述すると，$\eta = 2\zeta$ と近似する手法は多くの文献に見ることができる．しかし，この等式が成立するのは，粘性減衰に置換する１つの振動数，すなわち固有振動数のみである．変換式 $c = \eta k/\omega$ には必ず振動数が付随しており，この振動数のみにおいて成立する．このため，上記公式は便利であるが，特徴をよく把握しておかないと大きな誤差が発生する可能性がある．本稿は，内部減衰系振動モデルの過渡応答における精度と解法について考察したものである．

2．記号

m :質量
k :剛性
η : 損失係数
x : 変位
f : 外力
δ : 単位衝撃
ω : 角振動数
Ω : 固有角振動数
j :虚数単位
$(1+j\eta)k$: 複素剛性

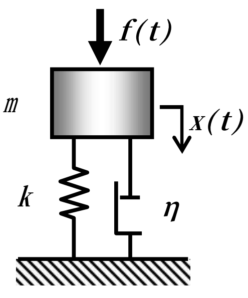

図１　内部減衰振動系

*2007 年 12 月 4 日自動車技術会振動騒音ｼﾝﾎﾟｼﾞｳﾑにおいて発表.

1)三菱自動車工業㈱　技術開発本部　デジタル技術部
(444-8501 愛知県岡崎市橋目町字中新切 1)

3．内部減衰１自由度系

3．1　周波数応答

周期外力を仮定した運動方程式(1)の周波数応答(コンプライアンス)は，数学的な近似なしに複素解として式(2)で得られる．減衰項は$j\eta k$である．

$$m\ddot{x} + (1 + j\eta)kx = Fe^{j\omega t} \tag{1}$$

$$\therefore \quad \frac{X}{F} = \frac{1}{k - m\omega^2 + j\eta k} \tag{2}$$

粘性減衰系(減衰係数 c)の場合には，運動方程式は式(3)，周波数応答は式(4)になる．減衰項は$jc\omega$である．

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = Fe^{j\omega t} \tag{3}$$

$$\therefore \quad \frac{X}{F} = \frac{1}{k - m\omega^2 + jc\omega} \tag{4}$$

又，減衰比ζは式(5)で定義する．$\zeta \equiv c/2\sqrt{mk}$　(5)

式(2)，(4)において共振周波数近傍では $k - m\omega^2$　0 であるため，周波数応答の大きさは減衰項に支配される．したがって，$j\eta k = jc\omega$ となるようにcを選べば，内部減衰は等価な粘性減衰になるはずである．したがって，ωに固有角振動数Ωを代入すると式(6)を得る．

$$\eta = \frac{c\omega}{k} = \frac{c\Omega}{k} = \frac{c}{k}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{c}{\sqrt{mk}} = 2\frac{c}{2\sqrt{mk}} = 2\zeta \tag{6}$$

$\eta = 2\zeta$である場合，周波数応答式(2)と式(4)の差はη=0.3 の時，最大で 1dB 程度であり実用上は差し支えない範囲である(図２)．両者の値が近似的に等しい理由は，減衰の与える影響が共振周波数近傍に限られるという特徴に起因しているからである．これは損失係数をパラメータとして周波数応答関数を重ね書きすると明瞭にわかる(図３)．しかし，この近似は１自由度系には使えるが，多自由度系ではさらに工夫が必要なことを後述する．

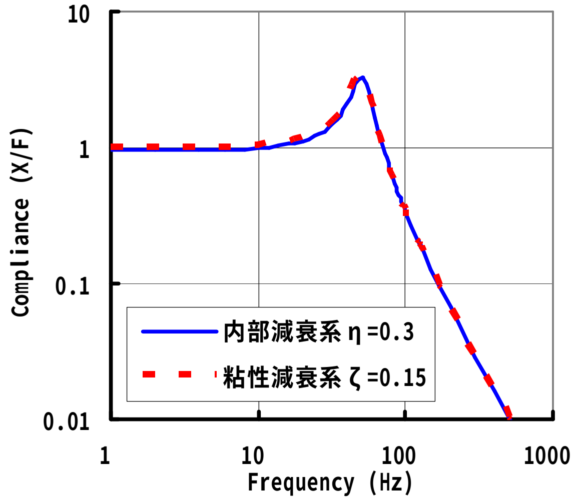

図２　粘性減衰系と内部減衰系の周波数応答(η=２ ζ)

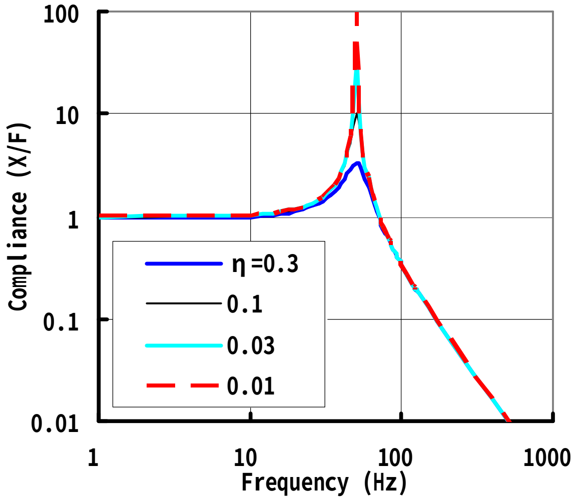

図３ 損失係数 η の影響

３．２ 過渡応答

単位衝撃応答の運動方程式は，式(1)の右辺に単位衝撃関数 $\delta(t)$ を代入して式(7)を得ることにする．

$$m\ddot{x}+(1+j\eta)kx=\delta(t) \tag{7}$$

式(7)の虚数項に， $x=\dot{x}/j\omega$ を代入すると式(8)を得る．

$$m\ddot{x}+\frac{\eta k}{\omega}\dot{x}+kx=\delta(t) \tag{8}$$

粘性減衰系の過渡応答は解析可能であるが，内部減衰系微分方程式(8)の過渡応答は厳密には解析できない．その理由は，損失係数の定義が正弦波強制振動を前提としているため，微分方程式中に角振動数 ω が内蔵されているからである．したがって，通常は式(6)から，

$$\eta k/\Omega=c \tag{9}$$

を取り出して粘性減衰 c に置き換え，式(8)に代入すると，共振周波数付近での等価な減衰を持つ微分方程式(10)を得る．

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=\delta(t) \tag{10}$$

式(10)は，粘性減衰系微分方程式と同じ形のため解け，単位衝撃応答式(11)を得る(図４)．

$$x(t)=\frac{1}{m\omega_d}e^{-\sigma t}\sin(\omega_d t) \tag{11}$$

ただし， $\sigma\equiv\Omega\zeta$ ， $\omega_d\equiv\Omega\sqrt{1-\zeta^2}$ である．

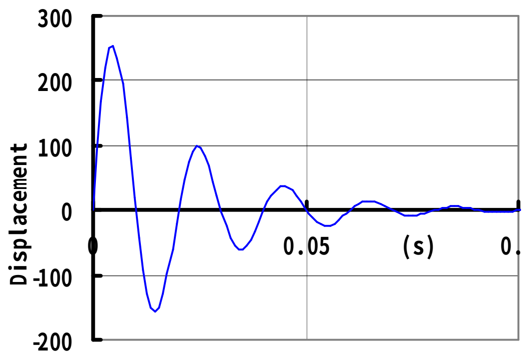

図４ 粘性減衰１自由度系の単位衝撃応答

４．内部減衰多自由度系

４．１ 周波数応答

ここでは損失係数が均一である構造体を対象とする．周期外力を仮定した多自由度系運動方程式(12)の周波数応答解法には主として直接法とモード法がある．どちらの計算精度も一般的には十分なので，詳細な説明を省略する．

$$[M]\{\ddot{x}\}+j\eta[K]\{x\}+[K]\{x\}=\{F\}e^{j\omega t} \tag{12}$$

４．２ 過渡応答

多自由度系内部減衰運動方程式は，式(12)の外力を単位衝撃δとして式(13)で表されるとする．

$$[M]\{\ddot{x}\}+j\eta[K]\{x\}+[K]\{x\}=\{\delta(t)\} \tag{13}$$

式(13)に， $\{x\}=\{\dot{x}\}/j\omega$ を代入すると式(14)を得る．

$$[M]\{\ddot{x}\}+\eta[K]/\omega\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{\delta(t)\} \tag{14}$$

通常，直接法過渡応答解析では微分方程式を逐次積分して数値解析する．しかし運動方程式(14)に角振動数 ω が内蔵されているため，１自由度系と同様，過渡応答をそのまま計算することはできない．式(9)と同様に，式(15)を用いて粘性減衰マトリクス c に変換し，式(14)に代入すると式(16)を得る．

$$\eta[\mathrm{K}]/\Omega=[\mathrm{C}] \tag{15}$$

$$[\mathrm{M}]\{\ddot{\mathrm{x}}\}+[\mathrm{C}]\{\dot{\mathrm{x}}\}+[\mathrm{K}]\{\mathrm{x}\}=\{\delta(\mathrm{t})\} \tag{16}$$

式(15)には変換のための振動数Ωが一個のみ存在するから，Ω以外の周波数領域では誤差が大きくなる．現象に応じて支配的な周波数を選ぶしかない．

次に，モード法過渡応答解析では，運動方程式(14)を非連成化してモード座標で表現すると式(17)を得る．ただし，ξはモード座標，m_n，k_n はそれぞれｎ次のモード質量，モード剛性である．

$$\begin{bmatrix} \mathrm{m}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{m}_n \end{bmatrix}\{\ddot{\xi}\}+\begin{bmatrix} \eta \mathrm{k}_1/\omega & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \eta \mathrm{k}_n/\omega \end{bmatrix}\{\dot{\xi}\}+\begin{bmatrix} \mathrm{k}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{k}_n \end{bmatrix}\{\xi\}=\{\delta_\xi(\mathrm{t})\} \tag{17}$$

モード座標の各１自由度運動方程式は独立であり，固有振動数は自由度の数だけ存在するから，1～n 次の角振動数 ω を固有角振動数Ω_1～Ω_nに置き換えると式(18)を得る．

$$\begin{bmatrix} \mathrm{m}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{m}_n \end{bmatrix}\{\ddot{\xi}\}+\begin{bmatrix} \eta \mathrm{k}_1/\Omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \eta \mathrm{k}_n/\Omega_n \end{bmatrix}\{\dot{\xi}\}+\begin{bmatrix} \mathrm{k}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathrm{k}_n \end{bmatrix}\{\xi\}=\{\delta_\xi(\mathrm{t})\} \tag{18}$$

結局，r 次の内部減衰は式(19)により等価なモード粘性減衰係数 c_r に変換され，モード座標における r 次運動方程式は式(20)となる．これは１自由度粘性減衰系方程式と同じ形であり，式(11)と同様に容易に解ける．

$$\eta \mathrm{k}_r/\Omega_r=\mathrm{c}_r \qquad (r=1\sim n) \tag{19}$$

$$\mathrm{m}_r\ddot{\xi}_r+\mathrm{c}_r\dot{\xi}+\mathrm{k}_r\xi_r=\delta_{\xi r}(\mathrm{t}) \tag{20}$$

このように，モード法ではモード毎の１自由度減衰係数を独立に設定できるので，各モード減衰比を $\eta/2=\zeta$ で近似した減衰比に変換できる[1]．

一例として２自由度振動系において，直接法により過渡応答を計算(EXCEL)した結果を図６に示す(X2 Direct)．損失係数は均一であるから，$\eta_1=\eta_2$ かつ η の周波数依存性は無しと仮定し，低い方の固有振動数に式(15)のΩを固定した．

他方，モード法では，モード座標に変換後式(19)を用いてモード毎の等価な粘性減衰に変換し，一自由度振動系単位衝撃応答を計算した後，モード合成して質点２の変位応答を得た結果を図６に示す(X2 Modal)．すなわちモード法では初期時刻の高周波成分が正しく計算されている．さらに，図６のスペクトルを高速フーリエ変換(FFT)した結果を図７に示す．直接法のスペクトルの二つの共振峰を半値巾法で損失係数を求めると低い周波数の損失係数は振動モデルと同じ 0.1 となったが，高い周波数の損失係数は 0.35 となり，入力した値

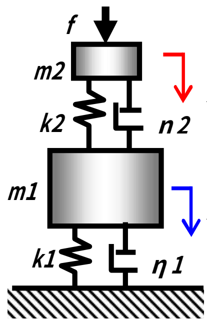

図５ 内部減衰２自由度振動系

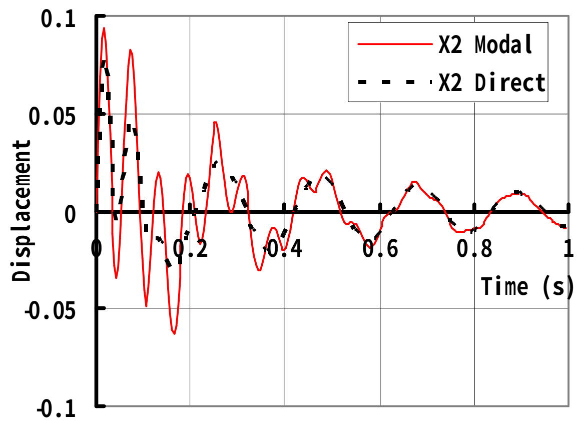

図６ 内部減衰２自由度振動系の過渡応答

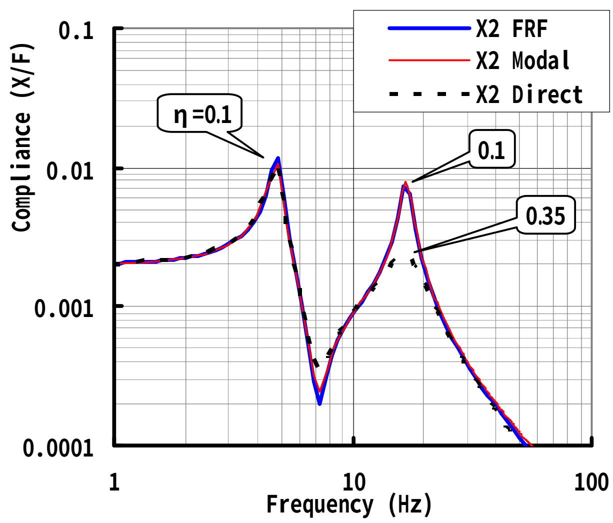

図７ 過渡応答の FFT スペクトルと周波数応答

とは全く異なる結果になった．他方モード法(Modal)では，二つの共振峰の損失係数は振動モデルに入力した値0.1と同じであり，周波数応答(FRF)とも一致している．以上の結果から，２自由度振動系の過渡応答解析は，直接法では精度が悪く，モード法では精度良く計算できることが分かる．

5．単純板振動モデル

構造材料のロスファクタ(損失係数と同義)を測定するJIS規格[(2),(3)]では，測定方法としてインパクト加振も紹介されており，過渡応答解析ができない内部減衰の測定法として妥当か？という疑問もある．本章では，３自由度以上の振動モデルとして片持ち単純板を有限要素法(NASTRAN)で解析した．

5.1 一定値を持つ損失係数

図８の単純板振動モデルにおいて，損失係数ηを板全体に均一に与え，単位衝撃応答を直接法とモード法の二通りの方法で解析した．ここで直接法では粘性減衰係数に変換する周波数を最低固有振動数とした．その後，高速フーリエ変換したスペクトル，モード法周波数応答(Modal FRF)，直接法周波数応答(Direct FRF)を重ねて図９に示す．すなわち直接法過渡応答(Direct Time)の精度が悪いことが分かる．他方，モード法過渡応答のFFTスペクトル(Modal Time)は周波数応答スペクトルとほぼ一致し，計算精度が良いことがわかる．

5.2 周波数依存性のある損失係数

損失係数が周波数依存性を持つ場合として，単純板の固有振動数を低いほうから三つ選び，代表的なノモグラムから温度一定条件下での各々の損失係数ηを得た．その損失係数を，周波数をパラメータとして図10に示す．損失係数に周波数依存性を与えられる過渡応答解析法はモード法のみであり，単位衝撃応答を高速フーリエ変換したスペクトルを図11に示す．各共振峰から半値巾法で損失係数を得ると，図10から入力した値とほぼ同じであり，過渡応答の精度が良いことがわかる．この結果から，損失係数に周波数依存性がある場合は，あらかじめ固有値解析から固有振動数を得，各固有振動数での損失係数を入力しておけば，モード法過渡応答で精度良く計算できることがわかる．したがって，JIS規格で定められたインパクト加振法は，測定方法として妥当であろう．

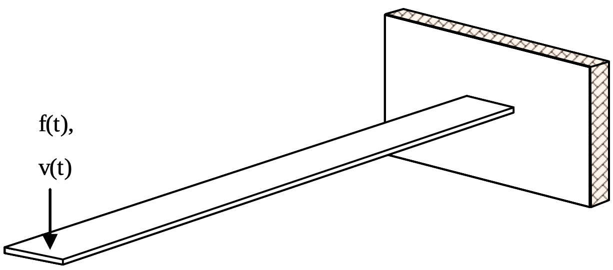

図８ 単純板振動モデル

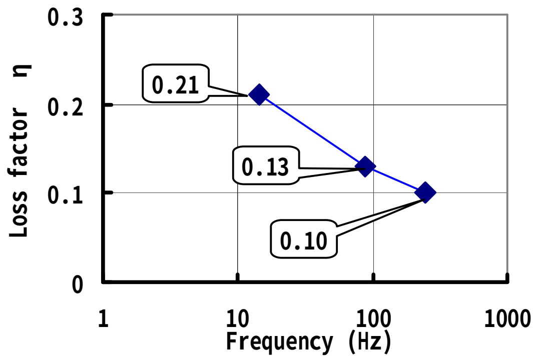

図10 周波数依存性のある損失係数

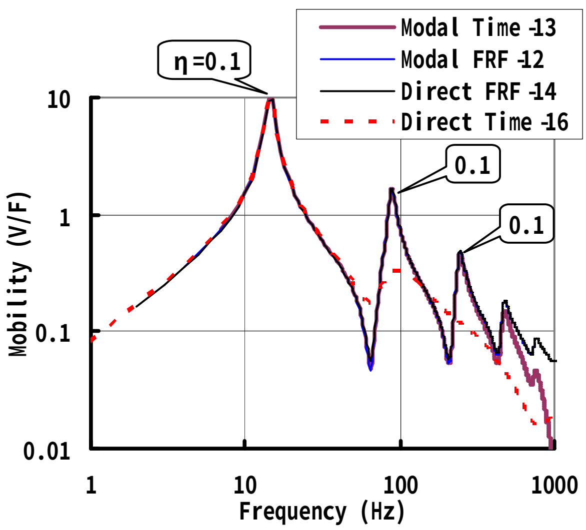

図９ 解法が異なる４つのスペクトル

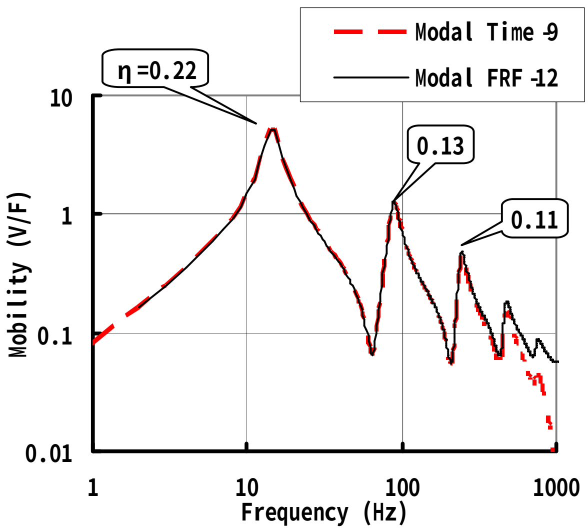

図11 解法が異なる２つのスペクトル

6．内部減衰系の過渡応答

「内部減衰系振動モデル微分方程式(7)又は(8)の過渡応答は厳密には解析できない」と3章で断言してしまったが，周波数領域での取り扱い容易さ，構造材料の特性に近いという利点があるため，諦めてしまうのはいささか残念である．本稿では先人の過渡応答研究のいくつかと，著者のとんちんかん法を織り交ぜて紹介し，内部減衰系過渡応答解析への思いを馳せてみる．

① 文献(4)(5)では，内部減衰系の過渡応答を粘性減衰と同じ形式と仮定し，減衰比・減衰固有振動数を得ている．しかし得られた微分方程式の解は，近似解となっているようである．

② 文献(6)ではいろいろな解法を議論し，矛盾点や近似解を考察している．複素剛性を含む微分方程式の過渡応答解は厳密には求まらず，簡単な関数で表すことは困難であることを証明している．又，振動数が負の場合(ω<0)も成立する運動方程式(21)から逆フーリエ変換する方法を紹介している．

$$m\ddot{x}+\left(\eta k/|\omega|\right)\dot{x}+kx=f(t) \tag{21}$$

③ 微分方程式を代数的に解く(とんちんかんな方法)

虚数を内蔵する微分方程式(7)の複素解は，式(22)となる．

$$x(t)=\frac{1}{\sqrt{(1+j\eta)mk}}\sin\left\{\left(\sqrt{(1+j\eta)k/m}\right)t\right\} \tag{22}$$

この解(図12)は微分方程式(7)を満足しており数学的には正しいが，実現象を表していない．又，時間とともに発散する傾向がある．元来，式(7)にある虚数 j は，解を $e^{j\omega t}$ と仮定した時の名残であり，外力 $Fe^{j\omega t}$ を消去した時，虚数 j を残したまま運動方程式にするのが正しくないと考えられる．文献(4)(5)でも外力をゼロとして自由振動解を導いているが，これも元の微分方程式が正しく成立してないと考えられる(7)．

④ 微分方程式を数値解析する(とんちんかんな方法)

微分方程式(7)を実部と虚部に分けた連立方程式とし，数値積分を計算した．得られた結果は③と同じ複素解になった．これも，計算結果を得た時点で正解のような錯覚を覚える．

⑤ 文献(8),(9)では，まず周波数応答を計算後，離散逆フーリエ変換して過渡応答に変換している．ただし，インパルスが入力される時刻以前に振幅がゼロでない結果となり，論理的に矛盾する結論が紹介されている．この矛盾については詳細な説明はされていない．著者も一自由度振動系の周波数応答を逆フーリエ変換してみた結果，同様に時刻ゼロ以前に応答が発生する結果となった．逆フーリエ変換した一例を図13に示す(図中Aのtime=0.97～0.99近傍が時刻ゼロ直前である)．しかし，初期時刻では，$\eta=2\zeta$ を用いて近似した粘性減衰振動系の解との差は小さい．

⑥ 文献(10)では，周波数応答から離散逆フーリエ変換する機能を持つ有限要素法ソフトが紹介されている．

⑦ 文献(11)では，内部減衰系大規模モデルの過渡応答を，精度良く解く工夫が紹介されている．

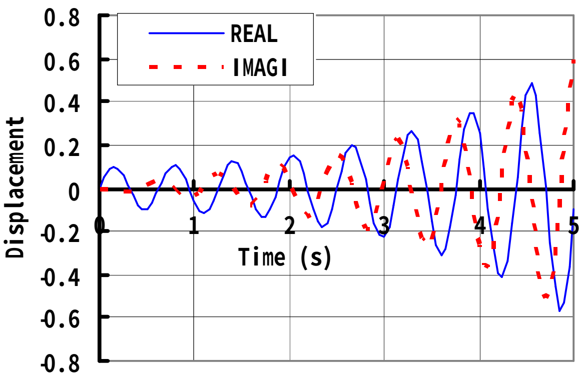

図12　微分方程式の複素過渡応答解

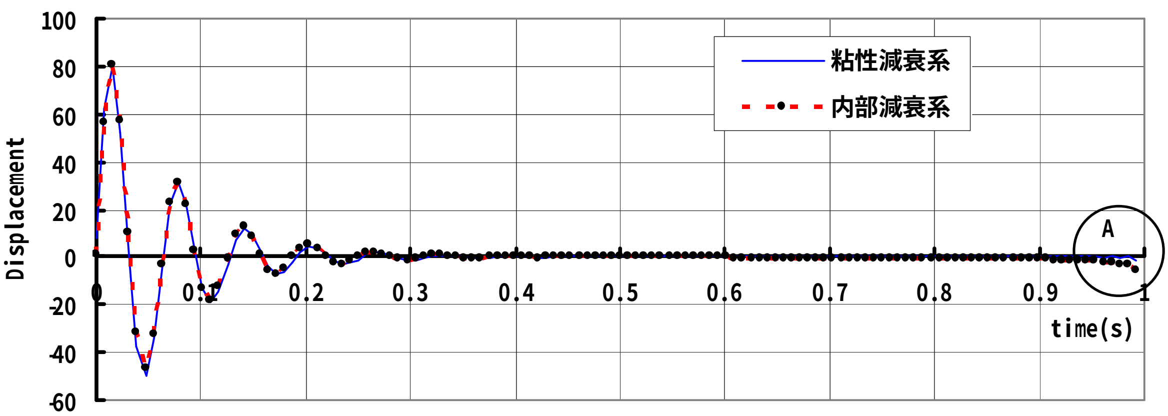

図13　周波数応答を逆フーリエ変換した単位衝撃応答

７．結　論

(1) 均一な内部減衰を持つ振動系における計算精度を下表に示す．但し，過渡応答においては，$\eta=2\zeta$ と近似する手法を用いる．

◎：精度優　○：精度良　△：精度不足

	１自由度系	多自由度系	
		直接法	モード法
周波数応答	◎	◎	◎
過渡応答	○	△	○

(2) 内部減衰振動系の過渡応答厳密解は得られない．

８．あとがき

「とんちんかん」は，分かったつもりになっていても実は十分理解していない状態である．教科書は理解できていても実現象と対面した時，知識が混乱することがある．本稿は敢えて著者のとんちんかんを抽出し，Back to the Basic に供出したものであるから，解説のとんちんかんもご寛容をお願いする[12]．

参　考　文　献

(1) 長松昭男：モード解析 pp.86-87 培風館(1985)
(2) 制振鋼板の振動減衰特性試験方法：JIS G-0602
(3) 加硫ゴム及び熱可塑性ゴムの動的性質試験方法：JIS K-6394
(4) 小西一郎，高岡宣善：構造動力学，pp.43-48，コロナ社 (1973)
(5) 安田仁彦：モード解析と動的設計，pp.41-47，コロナ社，(1993)
(6) 長池勝，長松昭男：モード解析に関する研究(第３報，一自由度系に対する基礎検討)，日本機械学会論文集(Ｃ編)51 巻 464 号(昭和 60-4)
(7) 長松昭男：モード解析 p.51 培風館(1985)
(8) CYRIL M.HARRIS：Shock and Vibration Handbook, 3rd edition pp.37-6～37-13 (1987)
(9) AHID D.NASHIF, DAVID I, G, JONES, JOHN P. HENDERSON：VIBRATION DAMPING, JOHN WILEY&SONS, (1985)
(10) David N.Herting：MSC/NASTRAN ADVANCED DYNAMIC ANALYSIS USER'S GUIDE, P.188, 日本ｴﾑｴｽｼｰ㈱ (1999)
(11) 海老澤他：モード合成法による中周波フルビークル解析の効率化検討，自動車技術会学術講演会前刷集 No.123-05，(2005)
(12) 田島清灝：振動とんちんかん，機械の研究，第 36 巻第１号，p.182－188 (1984)

和文抄録：

内部減衰系振動モデルの過渡応答解析は，運動方程式中に角振動数，又は虚数を含むためそのまま微分方程式としては解けない．近似解を得る方法として，等価な粘性減衰に置換する方法，逆フーリエ変換する方法がある．多自由度系の場合は，多自由度マトリクス方程式を直接解く方法は精度が悪く，モード法は精度が良い．

英文抄録：

Transient response of vibration model with hysteretic damping can not been analyzed strictly, because the differential equation includes angular frequency or an imaginary number. Equivalent viscous damping or inverse Fast Fourier Transform make possible to get an approximation solution. And modal method gives less error than Direct matrix method for multi degree of freedom system.