

奥山 暁¹ 今井 博英² 角山 正博³ 牧野 秀夫²新潟大学大学院自然科学研究科¹ 新潟大学自然科学系² 新潟工科大学³

1 背景・目的

音声や動画といったデータを扱うリアルタイムシステムでは、タスク処理要件が非常に厳しいため、システム設計には予め十分なシステム解析を行うことが不可欠である。リアルタイムシステムの解析方法として、GSPN(一般化確率ペトリネット)を用いてシステムのモデル化および解析を行う方法が挙げられる [1]。この方法は、システムを視覚的に記述できる点で非常に有用な方法である。GSPNは、マルコフ連鎖法により解析される。マルコフ連鎖の各状態の定常状態確率を計算する方法には、逆行列を用いる方法 [2]、訪問回数と平均滞在時間の積が定常状態確率に比例することに着目した方法がある。前者は、マルコフ連鎖の状態数の増加に伴い、解析時に使用するメモリ量も増加するため、解析できるマルコフ連鎖の規模が制限される。一方後者は、前者と比較しメモリ使用量を軽減することが可能である。しかし、マルコフ連鎖のすべての状態について訪問回数を導出する必要があるため、計算時間が増加する。

本研究では、GSPN解析時にマルコフ連鎖で発生する状態数を削減して解析を行う方法を提案する。

2 GSPNの解析手順

GSPNの解析手順を以下に示す。

1. モデルを可達グラフに変換
2. 可達グラフをマルコフ連鎖に変換
3. マルコフ連鎖の各状態の定常状態確率を計算
4. 可達グラフの各マーキングの定常状態確率を計算

本研究では、マルコフ連鎖の状態を集約し、集約する状態のみの訪問回数を導出することで、大規模なマルコフ連鎖を効率よく解析することを目的とする。

3 状態集約による解析

3.1 意義

本方式では、マルコフ連鎖の状態を2つの状態集合に分類し、一方の状態集合をひとつの状態に集約することで、メモリの使用量を抑える。また、集約する状態の訪問回数のみを導出することにより、マルコフ連鎖の各状態の定常状態確率を計算する際の処理の効率化を図る。

3.2 ループ

訪問回数の導出に、本方式では、状態分類と、ある状態を始点とし、複数の状態を経由し元の状態に戻る推移の過程を表すループを用いる。この推移の過程において、同じ状態を2度以上通ることにはないものとする。ループの例を図1に示す。 $q(s_a, s_b)$ は、状態 s_a から離れるという条件のもとで、状態 s_b に推移する条件

付き確率を表している。以後、これを条件付き推移確率を呼ぶ。推移の過程におけるすべての条件付き推移確率の積をループの生成確率と呼ぶ。図1の例では、 $q(s_a, s_b)q(s_b, s_c)q(s_c, s_a)$ がループの生成確率となる。

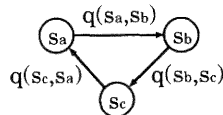


図1 ループ

状態 s に到達可能なループとは、 $q(s_i, s) > 0$ である状態 s_i を含むループを表す。

ループ l_i とループ l_j に同じ状態がひとつも含まれていない場合、 l_i と l_j は独立しているといい、 l_i と l_j を非接触ループと呼ぶ。

3.3 状態分類

本研究で提案する解析方法について述べる。

マルコフ連鎖の状態から異なる2つの状態 s_0 と状態 s_1 を決定する。 s_0 に α 回以内の推移回数で到達可能な s_1 以外の状態の集合を S_L とする。 S_L 以外の状態の集合を \bar{S}_L と表す。本方式では、 S_L に含まれる状態の訪問回数 $I(s)$ を求め、それを基に S_L をひとつの状態に集約することで、定常状態確率を計算する際の処理の効率化を図る。

3.4 訪問回数の導出

$I(s)$ の導出方法を示す。 \bar{S}_L に含まれる各状態 s_L について、 $I(s_L) = 1$ と仮定する。

各 $s \in S_L$ について、以下の処理を行う。

1. α 回の推移回数で s に到達できる状態のうち、訪問回数が得られている状態の集合 $S_\alpha(s)$ を求める。
2. s に到達可能なループ L_s を求める。ただし、訪問回数が得られている状態を含むループは除く。独立したループを L_s から n 個選び、この n 個のループの生成確率をかけた値を $L_s(n)$ とする。
3. $S_\alpha(s)$ に含まれる各状態 s' と s との間のループを含まないパスを求め、その集合を $R(s', s)$ とする。各パス $r \in R(s', s)$ についての、 s' から s に至る推移の過程における条件付き推移確率の積を Q_r とする。 r に含まれる状態と同じ状態を含むループを、 L_s から取り除いた集合を L_s^* とする。独立したループを L_s^* から n 個選び、この n 個のループの生成確率をかけた値を $L_s^*(n)$ とする。
4. メイソンの非接触ループ法 [3]を用い、 $I(s)$ を導出する。

$$I(s) = \frac{\sum_{s' \in S_\alpha(s)} \sum_{r \in R(s', s)} M_r \Delta_r}{\Delta} \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 M_r: I(s')Q_r \\
 \Delta: 1 - \Sigma(L_s \text{内のすべてのループの生成確率}) \\
 \quad + \Sigma(L_s \text{内のすべての2個の非接触ループ} \\
 \quad \quad \text{の組み合わせについての } L_s(2)) \\
 \quad - \Sigma(L_s \text{内のすべての3個の非接触ループ} \\
 \quad \quad \text{の組み合わせについての } L_s(3)) \\
 \quad + \dots \\
 \Delta_r: 1 - \Sigma(L'_s \text{内のすべてのループの生成確率}) \\
 \quad + \Sigma(L'_s \text{内のすべての2個の非接触ループ} \\
 \quad \quad \text{の組み合わせについての } L'_s(2)) \\
 \quad - \Sigma(L'_s \text{内のすべての3個の非接触ループ} \\
 \quad \quad \text{の組み合わせについての } L'_s(3)) \\
 \quad + \dots
 \end{array} \right.$$

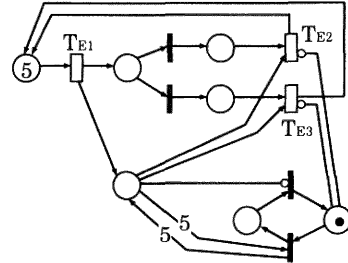


図2 GSPNモデル

3.5 定常状態確率計算・状態展開

重みベクトルを $X = \{I(s)T(s)\}_{s \in S_L}$ とする。X を用い、 S_L をひとつの状態に集約する。集約後の推移率行列 G^* は、

$$G^* = \begin{bmatrix} E_{LL} & E_{LL}X \\ u^T E_{LL} & -d \end{bmatrix}$$

と表すことができる。 $d = u^T E_{LL} X$ 、 u^T はすべての要素が1のベクトルである。ここで、 S_L の集約後の状態を s_L とする。行列 E_{LL} は S_L 内の状態間の推移を表す推移率行列である。また、行列 $E_{LL} X$ は s_L から S_L 内の状態への推移を、行列 $u^T E_{LL}$ は S_L 内の状態から s_L への推移を表す推移率行列である。

S_L に対する定常状態確率ベクトル P_{S_L} 、および s_L に対する定常状態確率 p_{s_L} は、以下の式より求まる。

$$\left\{ \begin{array}{l}
 G^* \cdot \begin{bmatrix} P_{S_L} \\ p_{s_L} \end{bmatrix} = 0 \\
 u^T P_{S_L} + p_{s_L} = 1
 \end{array} \right.$$

最後に、 p_{s_L} を重みベクトル X で展開する。要素の和が1となるように補正することにより、最終的な定常状態確率を導出する。

4 解析例

図2のモデルを用いた解析例を示す。マルコフ連鎖の状態数は35である。解析結果を表1に、メモリ使用量の比較結果を図3に示す。表1の1段目は α を制限しない場合、2段目以降は α を制限した場合の結果である。平均相対誤差は、集約処理を行わずに計算したマルコフ連鎖の各状態の定常状態確率との平均相対誤差を示す。図3の一番左が集約処理を行わない場合、一番右が α を制限しない場合に要したメモリ量である。 α を大きくするにつれ、より多くのループおよびバスを導出することが可能となるため、平均相対誤差が減少していく。また、 S_L の状態数が増加するため、メモリ使用量も減少していく。

表1 解析結果

α	状態数		定常状態確率の平均相対誤差 (%)
	S_L の状態数	S_L の状態数	
∞	34	1	0.0000×10^0
6	18	17	7.1337×10^{-1}
8	19	16	1.1622×10^{-1}
10	31	4	1.6880×10^{-2}
12	34	1	1.8816×10^{-3}
14	34	1	0.0000×10^0

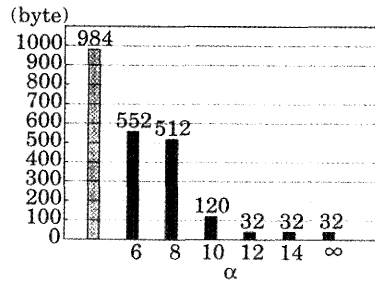


図3 メモリ使用量

5 まとめ・今後の計画

GSPN 解析時にマルコフ連鎖で発生する状態数の増加に対して、状態集約を行うことで状態数を削減して解析を行う方法を提案した。提案した手法を実装して解析を行った結果、 α を制限しない場合に導出されるループおよびバスの50%程度を導出することで、十分信頼できる値が得られることが分かった。また、本方式ではループ状態集合 S_L に対する重みベクトル X の導出に、多くの計算時間を必要とすることが分かった。この計算時間は、 $I(s)$ を導出する際非接触ループを探索する部分が大半を占めている。そのため、今後はループおよび非接触ループを探索する部分の、効率のよい計算アルゴリズムの検討が必要である。

参考文献

- [1] 奥川峻史, 「ベトリネットの基礎」
- [2] 森村英典, 高橋幸雄, 「マルコフ解析」
- [3] G.J. Williams, R.S. Miles, L.C. Casady, J.P. Edenhofer, 「A Package of Computer Subprograms for Control System Analysis」