

# コックス型分布を用いた任意確率分布の近似方法について

Approximation of Probability Distribution Functions by Coxian Distribution

江部文隆<sup>1</sup>  
Fumitaka Ebe

今井博英<sup>1</sup>  
Hiroei Imai

角山正博<sup>2</sup>  
Masahiro Tsunoyama

<sup>1</sup>新潟大学大学院自然科学研究科  
Graduate School of Science and Technology, Niigata University

<sup>2</sup>新潟工科大学  
Niigata Institute of Technology

## 1 はじめに

様々なネットワークサービスが普及している現在、リアルタイム性が重視されるネットワークが増加している。そのため、実用化の際に十分な性能評価をする必要がある。

従来のシステム解析では、タスクの発生間隔や処理時間は指数分布に従うものとされてきた。しかし、最近の研究において、実際は指数分布だけでは近似できないことが報告されている。そのため、多様な分布に従うシステムの解析が必要となっている。

本研究は、多様な分布をコックス型分布を用いて近似する近似方法 [1] を改良する。

## 2 コックス型分布

コックス型分布は、指数分布に従うノードからなる図 1 のような網の滞在時間で表される。ここで、 $a_0$  は網に入る確率、 $a_i$  は  $i$  番目のノードから  $i+1$  番目のノードへ遷移する確率、 $b_i$  は  $i$  番目のノードから網を抜け出る確率である。コックス型分布は任意分布を近似可能であり、指数分布の直列結合分布であるため、容易に解析モデルへ組み込むことができる。

## 3 従来法の問題点

[1] では、近似対象分布を指数分布とアーラン分布の並列結合分布で近似してからコックス型分布へ変換する。並列結合分布での近似は、対象分布を分割して一部分ずつ近似を行う。このとき、一部分の近似結果が他の部分に与える影響を考慮するために、その近似結果を近似対象分布から引く処理を行っている。このため、従来法では分布関数が負の値を取り近似不可能となってしまうことがあった。そこで、対象分布から近似結果を引く処理をせずに近似できるように近似方法を改良する。

## 4 改良した近似方法

従来法と同様に、指数分布とアーラン分布の並列結合分布で近似した結果をコックス型分布へ変換する。改良した近似方法は以下の通りである。

### 1. 近似対象分布の分割及び各パラメータの指定

近似対象分布を  $x = 0$  付近の単調減少部分  $P_1$ 、いくつかの凸型部分  $P_i$  ( $i = 2, \dots, M-1$ )、裾部分  $P_M$  の  $M$  個に分割する。分割点、凸型部分の頂点、制限位相数はユーザが指定する。

### 2. 各部分の近似

$P_1, P_M$  は超指数分布で、 $P_i$  ( $i = 2, \dots, M-1$ ) はアーラン分布でそれぞれ個別に近似する。

### 3. 近似パラメータの最適化

各部分に対する指数分布とアーラン分布の割合である選択確率、及び指数分布とアーラン分布のパラメータを、KL 情報量が最小となるように最適化する。最適化方法として逐次 2 次計画法を適用する。最適化では、選択確率の総和が 1 となるように補正する。

### 4. 並列結合分布をコックス型分布へ変換する。

## 5 近似結果

実際の確率分布を近似した結果の確率密度関数を図 2 に示す。近似方法として、従来法 (old)、本方式 (new)、EM アルゴリズムを用いた近似方法 (EM algorithm) [2] の 3 種類を用いている。全ての近似方法で総位相数は 12 としている。また、各近似結果と対象分布との平均誤差及び処理時間を表 1 に示す。

## 6 まとめ

[1] の近似方法を改良し、より多様な分布の近似が可能となった。しかし、近似精度が低下している場合もあるため、さらなる近似精度の向上が課題である。

## 参考文献

- [1] 佐々木幸恵, 今井博英, 角山正博, 石井郁夫 “確率密度関数の形状に合わせたコックス型分布による確率分布の近似方法について” 信頼性, Vol.28, No.3, pp.205-218, 2006.
- [2] S. Asumussen, O. Nerman and M. Olsson, “Fitting phase-type distributions via the EM algorithm,” Scandinavian J. Statist., vol.23, pp.419-441, 1996.

表 1 近似結果の平均誤差及び処理時間

	従来法	本方式	EM
確率密度関数	1.456323e-04	2.100423e-04	2.356656e-04
ccdf	2.730100e-03	7.877350e-03	6.243782e-03
KL 情報量	1.422953e-01	2.070053e-01	2.352213e-01
処理時間	8.94[s]	16.16[s]	128.40[s]

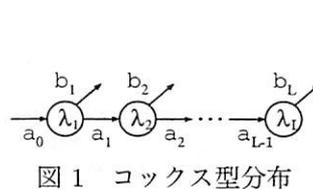


図 1 コックス型分布

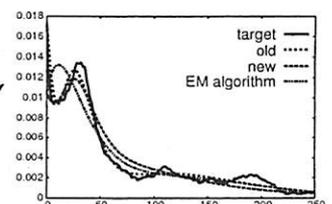


図 2 確率密度関数