SD-8-3 二次元セルラー・オートマトンモデルに基づくフォールト・トレラント並列処理システム

A fault-tolerant parallel processing system modeled by a two-dimensional cellular automaton

川中正隆* 角山正博** 内藤祥雄*

Masataka KAWANAKA Masahiro TSUNOYAMA Sachio NAITO

*長岡技術科学大学 Nagaoka University of Technology

**長岡工業高等専門学校 Nagaoka College of Technology

1. はじめに

一次元セルラー・オートマトンモデルを用いて，再構成可能な並列処理システムを構成する方法については既に明らかにされている[1]．

本稿では，二次元セルラー・オートマトンモデルを用いて，より大規模な並列処理システムを構成する方法を示す．

2. セルラー・オートマトン

一次元セルラー・オートマトンM_1は次の3項組で表される．

$$M_1=(Z_n,\ Q_1,\ W_1),$$
$$Z_n=\{0,\ 1,\ \cdots,\ n-1\},$$
$$Q_1=\{q_0,\ q_1,\ \cdots,\ q_{t1-1}\},$$
$$W_1: S_{s1}\rightarrow S_{s1},$$
$$W_1=[w_{1(i)}],\ w_{1(i)}\in Q_1,\quad 0\leqq i\leqq n-1,$$
$$S_{s1}=\{S_1=(s_0, s_1, \cdots, s_{n-1})\ |\ s_i\in Q,\ 0\leqq i\leqq n-1\}.$$

ここで，Z_nはセル空間と呼ばれ，正整数nを法とする整数の剰余類環であり，その元によってセルの位置を表す．Q_1はセルの状態集合と呼ばれる有限集合である．W_1はセルラー・オートマトンの状態遷移を定めており，重み関数と呼ばれる．同一の時刻における全てのセルの状態を要素とするベクトルS_1をセルラー・オートマトンの様相と呼び，その集合S_{s1}を様相集合という．

また，本稿では様相の遷移を，重み関数W_1と現在の様相S_1を表す多項式の積で求めることができる，線形セルラー・オートマトン[1]について検討する．

次に，二次元セルラー・オートマトンM_2を定義する．

［定義1］

$$M_2=(Z_{n1,n2},\ Q_2,\ W_2),$$
$$Z_{n1,n2}=Z_{n1}\times Z_{n2},$$
$$Z_{n1}=\{0,\ 1,\ \cdots,\ n_1-1\},$$
$$Z_{n2}=\{0,\ 1,\ \cdots,\ n_2-1\},$$
$$Q_2=\{q_0,\ q_1, \cdots,\ q_{t2-1}\},$$
$$W_2: S_{s2}\rightarrow S_{s2},$$
$$W_2=[w_{2(a,b)}],\ w_{2(a,b)}\in Q_2,\quad 0\leqq a\leqq n_1-1,\ 0\leqq b\leqq n_2-1,$$
$$S_{s2}=\{S_2=(s_{0,0}, s_{1,0}, \cdots, s_{n1-1,0}, s_{0,1}, s_{1,1}, \cdots, s_{n1-1,1}, \vdots, s_{0,n2-1}, s_{1,n2-1}, \cdots, s_{n1-1,n2-1})\ |\ s_{i,j}\in Q_2,\ 0\leqq i\leqq n_1-1,\ 0\leqq j\leqq n_2-1\}.$$

［定義終わり］

ここで，$Z_{n1,n2}$はn_1及びn_2を法とする整数の剰余類環の直積である．

3. セルラー・オートマトン間の写像

M_1からM_2への写像Φを次のように定義する．

［定義2］

$$M_2=\Phi(M_1)=(\phi_Z(Z_1),\ \phi_Q(Q_1),\ \phi_W(W_1)),$$
$$\phi_Z: Z_1\rightarrow Z_2,$$
$$\phi_Q: Q_1\rightarrow Q_2,$$
$$W_2=\phi_W(W_1)=[w_{2(a,b)}]=[\phi_Q(w_{1(i)})],$$
$$0\leqq i\leqq n-1,\ (a,b)=\phi_Z(i).$$

［定義終わり］

セルラー・オートマトンのセル空間および，状態集合は，環をなしている．従って，写像ϕ_Z，ϕ_Qの同形は環における同形[2]として定義することができる．

さらに，この様な写像を用いて，セルラー・オートマトンの同形を定義する．

［定義3］

次の条件が満たされるとき，写像$\Phi: M_1\rightarrow M_2$は同形写像であるといい，このような写像Φが存在する2つのセルラー・オートマトンM_1，M_2を，$M_1\cong M_2$と表す．

(1) ϕ_Zが同形写像である（セル空間が同形である）．

(2) ϕ_Qが同形写像である（状態集合が同形である）．

［定義終わり］

セルラー・オートマトンを並列処理システムのモデルとして用いることにより，様相集合を符号と見なして，システムの再構成や故障検出を容易に行えるシステムを構成できる．

一次元セルラー・オートマトンの様相集合が，等距離定重み性を持つための条件は，既に明らかにされている[1]．この結果と，定義3より，二次元セルラー・オートマトンの様相集合が等距離定重み性を持つための条件が次の定理で与えられる．ここで，$<h(x)>$は，多項式h(x)によって生成されるイデアルを表す．

［定理1］

$x^{n1\cdot n2}-1=h(x)\cdot g(x)$において，h(x)が原始多項式であり，

$$(g(x)-x^t)\in <h(x)>$$

となる整数tが存在し，かつt，n_1及びn_2が互いに素であるならば，g(x)を重み関数とする一次元セルラー・オートマトンと同形な二次元セルラー・オートマトンが存在し，その様相の集合は等距離定重み性を持つ．

但し，qを素数とし，

$$n_1\cdot n_2=q^{m1\cdot m2}-1,$$
$$m_1\cdot m_2=\deg\ h(x)$$

である．

［定理終わり］

4. フォールト・トレラント並列処理システム

本稿で提案する並列処理システムでは，処理要素がバスによりトーラス状に接続されている．システムは図1に示すように，グローバル制御部，処理要素部，接続部からなっている．また，処理要素は，データ処理部とローカル制御部から構成されている（図2）．

$n_1\times n_2$個からなる処理要素の集合を$P_{n1,n2}$，処理要素が取り得る状態を表す有限集合をQ_P，システムの状態遷移関数をD，休止している処理要素の状態集合をI，処理要素間の接続を決める写像をRとし，$P_{n1,n2}$，Q_P，Dをそれぞれ前節で定義したセルラー・オートマトンM_2の$Z_{n1,n2}$，Q_2，W_2に対応づけ，次のように並列処理システム$FPP_{n1,n2}$を定義する．

［定義4］

$FPP_{n1,n2}=(P_{n1,n2}, Q_P, D, I, R)$,

$P_{n1,n2}=\{p_{i,j}\}$, $0 \leqq i \leqq n_1-1$,

$0 \leqq j \leqq n_2-1$,

$Q_P=\{q_0, q_1, \cdots, q_{r-1}\}$,

$D: S_{PS} \rightarrow S_{PS}$,

$I \subset Q_P$,

$R: PID \rightarrow CNT$.

ここで，S_{PS}は処理要素の状態$s_{pi,j} \in Q_P$を要素とする行列$s_P=[s_{pi,j}]$（システムの状態と呼ばれる）の集合である．ＰＩＤは各々の処理要素に対して一意に定められるラベルであり，ＣＮＴは接続先の相対アドレスである．

［定義終わり］

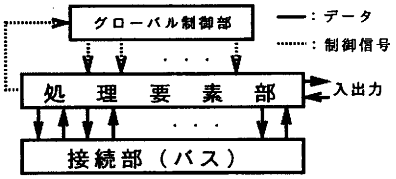

図１．並列処理システムの構成

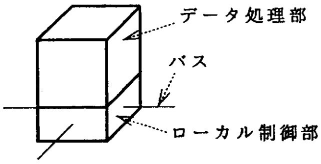

図２．処理要素の構造

ここでは，定理１を満たす二次元セルラー・オートマトンモデルに基づいて構成された並列処理システムの再構成法について検討する．

まず，システム中に発生する故障について，次の仮定をおく．

［仮定］

(1) データ処理部およびローカル制御部の故障は検出可能である．

(2) 処理要素の数がＮ－１個の時，故障しているデータ処理部の個数は高々$\log_2 N-1$である．

(3) 接続部は耐故障性を有する．

［仮定終わり］

このような並列処理システムは，処理要素に故障が生じたとき，故障した処理要素の状態が休止状態Ｉの要素となるようにシステムの状態を遷移させることにより再構成を行うことができる．

［補題］

位置（ｉ，ｊ）にある処理要素$p_{i,j}$の状態を，一回の状態遷移で休止状態（０）に設定し得る多項式の集合$F_{i,j}$は，次式で与えられる．

$$F_{i,j}=\{f_k(x,y) \mid f_k(x,y) \cdot D(x,y) = s_{p0,0}+s_{p1,0} \cdot x+\cdots+s_{pi,j} \cdot x^i y^j+\cdots+s_{pm1-1,m2-1} \cdot x^{m1-1} y^{m2-1},\ s_{pi,j}=0\}.$$

（証明）明らか．

［補題終わり］

［定理２］

処理要素$p_{r1,r2}$, $p_{s1,s2}, \cdots, p_{t1,t2}$が故障しているとき，次の性質を満たす多項式$f_k(x,y)$で表される状態からは，一回状態を遷移させることにより並列処理システムの再構成を行うことができる．

$$f_k(x,y) \in F_{r1,r2} \cap F_{s1,s2} \cap \cdots \cap F_{t1,t2}$$

（証明）

補題から明らか．

［定理終わり］

（例）システムの再構成

１５個の処理要素を有し，同時に動作する８個の処理要素がツリー状に接続された並列処理システムを示す．

$$FPP_{5,3}=(P_{5,3}, \{0,1\}, D, \{0\}, R)$$

$$D(x,y)=1+x^3+xy+x^2y+y^2+xy^2+x^2y^2+x^3y^2$$

$$R: PID \rightarrow CNT$$

$$p_{0,0} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & ① \end{bmatrix} \rightarrow (0,2)$$

$$\vdots$$

$$p_{3,2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & ① \end{bmatrix} \rightarrow (4,2)$$

ここで，ＰＩＤは○を付した処理要素のラベルであり，ＣＮＴは，その処理要素からの出力先を表す．

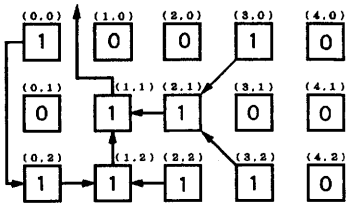

図３．ツリー状に接続されたシステム

このシステムの処理要素，$p_{1,2}$, $p_{2,1}$, $p_{3,0}$に故障が生じたときには，多項式$f_{15}(x,y)=1+xy+x^2y^2+x^3$により次のように再構成される．

$$s_P(x,y)=f_{15}(x,y) \cdot D(x,y) = 1+x^2+x^3y+x^4y+y^2+x^2y^2+x^3y^2+x^4y^2$$

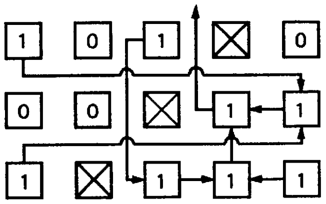

図４．再構成後のシステム

5. おわりに

二次元セルラー・オートマトンを定義し，一次元と同形なオートマトンをモデルとして，耐故障性を有する並列処理システムの構成を示した．

ローカル制御部が有すべき機能，一次元モデルと同形でない二次元モデルの性質に関する考察等が，今後の課題として残されている．

参考文献

(1) 角山：「セル構造オートマトンモデルに基づく耐故障性を有する並列処理システム」，長岡技術科学大学博士論文，1990.

(2) 石田：「代数学入門」，実教出版．

(3) 今井：「符号理論」，電子情報通信学会．