

課題遂行中の脳波の解析

— 相関次元の検討 —

村上 肇* ・ 橋本圭子** ・ 伊藤建一***

(平成10年10月31日受理)

Analysis of Electroencephalogram during Task Performance

— Study on the EEG correlation dimension —

Hajime MURAKAMI*, Keiko HASHIMOTO** and Ken-ichi ITOH***

This study examines nonlinear dynamical aspects of electroencephalogram(EEG) by evaluating EEG correlation dimension. Subjects were four healthy male college students, who performed two kinds of task that differed in complexity. One requires listening selectively and pushing a button in one's right hand; the other requires mental calculation besides them. The results demonstrated that in some scalp sites values of EEG correlation dimension were higher during performing more complex task, and that these sites tend to be in left hemisphere. It was also suggested that EEG correlation dimension can measure the status of brain activity that is not reflected in traditional frequency analysis.

Key words : electroencephalogram(EEG), correlation dimension, task performance

1 はじめに

脳波 (electroencephalogram, EEG) の次元は、脳の活動の複雑性を示す新しい測度として近年注目されている。これは、非線形決定論的力学系 (カオス系) — 単純な決定論的法則に従いながら初期条件に敏感で無秩序なふるまいを示す — の見地から脳機能を理解しようとする考え方に基づいて生まれたものである。この非線形力学的解析を適用することによって、例えば EEG のような一見無秩序で複雑な電氣的活動が、単純な法則に支配されていることの量的な測度を得ることができる。一方、生理学からはニューロン集合体に関する Hebb の説が EEG 次元理解の基礎を与えている¹⁾。Hebb の説は、ニューロンは機能的なまとまりによって集合体を形成し、各集合体は比較的独立な閉鎖系として活動するというものである。これによれば、脳で複雑な処理が行われる場合にはより多くのニューロン集合体が活性化しており、したがってこの時の脳の電氣的活動にはより多くの信号発生器 (generator) が関与することになる。EEG 次元はこの generator 数を反映するものである。こうした理論に基づくものが Hausdorff 次元 (いわゆるフラクタル次元) であ

* 情報電子工学科 助教授

** 一般教養 (心理学) 講師

*** 情報電子工学科 助手

るが、相関次元はその下界として、現実の時系列データの分析に用いられ、システムの状態を決定する変数の数、すなわちシステムの複雑性の指標とみなされる。（詳細については、例えば Rapp ら²⁾、Pritchard ら^{3,4)}の議論を参照。）

この EEG 相関次元を用いることによって、従来の EEG 測度からの知見を補って、脳機能の新しい理解が可能になると期待される。この問題について、本論文ではまず過去に報告されている研究結果を紹介・検討する。次いで、実際に複雑な情報処理が要請される課題状況に関して、EEG 相関次元を測度とした実験的研究を行ったので報告する。

2 これまでの研究

最初に次元算出法に関して簡単に触れておきたい。EEG 相関次元の研究は Grassberger-Procaccia⁵⁾ によるアルゴリズムの開発を契機として進展した³⁾。以下に紹介する研究のいくつかもこの Grassberger-Procaccia 法に基づいた算出法を用いている。これ以外の方法としては、平均ポイントワイズ法、Takens-Ellner 法等それぞれに特徴をもつものがある。しかしいずれのアルゴリズムを用いるにせよ、算出された次元はその基にある脳の電気的活動の絶対的な次元ではなく、相対的な次元を示すものと考えねばならない^{2,3,6~8)}。

睡眠段階と EEG 次元 睡眠時脳波は、波形及び周波数に関してその特徴が最も一般化されているもののひとつであり、その点で EEG 次元研究の初期に睡眠脳波が注目された⁹⁾のはもっともなことであった。その後の研究も含めて、睡眠段階が深まると相関次元が概ね低下するという結果が得られている^{9~11)}。また、同じ睡眠段階内では測定部位による次元の差はほとんどなく、睡眠が深いと個人差も小さいという⁹⁾。これらの結果は、睡眠に伴う大脳の機能低下状態が、脳の電気的活動を支配する generator の数の相対的低下に反映されることを示している。一方 REM 期については、夢に関わる情報処理の複雑さの増加に伴って次元が高くなるという報告もある¹⁰⁾。

安静時 EEG 次元 覚醒時の EEG に関しては、周波数分析からは α 波の出現が開眼時よりも閉眼時に多いことが確認されている。相関次元に関しても開眼と閉眼の間で差が見られ、脳のかなり広い範囲で「開眼の次元 > 閉眼の次元」の関係が見られるという^{4,6)}。これは、開眼による視覚系の活性化が関わっているものとみなされる。一方、発達的变化に関する研究から、閉眼安静時の次元は 7 歳から 60 歳の範囲で年齢と共に高まることが示され、これは皮質の機能的発達、すなわち機能的システムの数と多様性の発達によるものとして解釈されている¹²⁾。

病理学的研究 てんかん発作に伴う異常脳波は、発作焦点の発射が伝播したものとみなされるが、この EEG 相関次元を分析した研究がある。spike and wave を特徴とする小発作 EEG の相関次元の値は 2.05 と、健常者の睡眠第 4 段階（次元値 4.05）と比べてもかなり低いという¹³⁾。また側頭葉てんかん患者の間欠期 EEG では、発作焦点付近で抗てんかん薬の血清レベルが下がると次元が低下するが、このような変化は EEG 波形には現れないという¹⁴⁾。また精神分裂病患者では、測定部位と次元値の関係が健常者と逆転する¹⁵⁾、健常者よりも安静、課題遂行時とも次元が高くなる⁸⁾などの報告がある。特に後者の結果に関しては、患者の EEG 高次元状態は脳機能のまとまりを欠いた状態を反映していると

解釈されている。一方、向知性薬は健常者の“頭皮の空間的 EEG 次元”を低下させる¹⁶⁾という報告もあり、これも脳の機能的まとまりと低次元の関係を伺わせるものである。

課題遂行中の EEG 次元 課題遂行中の EEG 相関次元に関しては、安静時に比べて次元が高まることがいくつかの研究で確認されている^{2,6,17)}。更に、安静時からの次元の増加量は加算課題よりも減算課題の方が大きいこと²⁾、暗算課題の遂行中には右利きの人では左側頭葉の、左利きでは右側頭葉の次元が相対的に高くなること⁶⁾、イメージ課題の方が実際の知覚課題よりも次元が高いこと^{1,7)}、等が報告されている。一方、事象関連性の EEG 次元に関する研究では、ターゲット反応後の方が非ターゲット反応後よりも相関次元が低い²⁾、随意運動の準備電位期間に相関次元が高くなる¹⁸⁾という。

3 実験

前章で紹介した諸研究から、EEG 相関次元の高まりは、脳の活動状態の複雑性、独立に作用する generator 数、の増加した状態を反映することが示唆される。しかしながら、これは、次元測度の数学的性質、及び EEG 次元値とそれが得られた脳の機能状態との対応関係から推測されたものにすぎない。相関次元が脳機能の複雑性の測度として十分な妥当性を得るためには、脳の情報処理の複雑度を独立変数とした時に得られる次元値が検討される必要がある。この点を検討しようとした研究もあるが¹⁷⁾明確な結果は得られてはいない。そこで我々は、必要な情報処理手続きの数が異なる課題を設定し、それらを遂行しているときの EEG 次元を比較することによって、この問題を明らかにしようとした。すなわち、課題遂行中は安静時よりも EEG 相関次元は高まるが、複雑な処理を要する課題ではそうでない課題よりも、EEG 次元の値は大きくなると予想される。そしてこの場合の次元の変化は、その課題の処理に相当する皮質領域により顕著に現れる可能性がある。また相関次元による結果は、周波数分析に基づいて得られた α 波の変動結果と比較された。

3-1 方法

被験者 本実験への参加に了解の得られたボランティアで、健常な右利きの男子大学生 4 人（平均年齢 22 歳）であった。

実験条件 2 種の課題条件及び閉眼・開眼の安静条件である。2 種の課題条件は、一連の文章の中に不規則に埋め込まれた数値に対する選択的聴取課題であるが、必要とされる処理手続き数がそれぞれ異なる。第 1 の課題は数値の検出に対して被験者は右手でボタン押し反応するだけでよく（聴取条件）、第 2 の課題は数値の検出の度にボタン押し反応に加えて、逐次暗算で加算し最終的な総数を求めなければならなかった（暗算条件）。

実験装置及び測定方法 EEG の測定には NEC 三栄製の脳波計 SYNAFIT EE2110 を、導出には ELCTRO-CAP INTERNATIONAL INC. のエレクトロキャップを用いた。記録は、校正 $10\mu\text{V/mm}$ 、時定数 0.3 秒、高域遮断フィルタ 60Hz、記録紙の送り速度 3 cm/sec に設定し、8 チャンネルについて、各実験条件中（安静条件：2 分、課題条件：5 分）に連続記録された。EEG データは、記録と同時にケーブルを介してサンプリング周波数 200Hz で AD 変換され、パーソナルコンピュータ（NEC 製 PC-9821Nb10）に取り込んで保存された。

EEG の導出は両耳朶を基準とした単極誘導により、10-20 electrode system に従って Fp1-A1, Fp2-A2, C3-A1, C4-A2, P3-A1, P4-A2, O1-A1, O2-A2 の電極配置で行われた。EEG と平行して、心電図が両手首の内側に装着した電極から、また被験者の手元スイッチからの信号が一旦パソコンに取り込まれた後、それぞれ脳波計の 1 チャンネルを利用して記録された。被験者は銅製の金網で囲った簡易シールドルームの中の椅子に腰掛けた。実験中室内の照明は薄明であった。

データ解析 本実験で使用された測度は、各条件における EEG の相関次元及び α 周波数成分の出現率 (α 波出現率) である。記録された EEG データはオフラインで、閉眼安静、開眼安静、聴取条件、暗算条件のそれぞれについて、アーチファクトのない分析区間 (1 区間 10 秒) が選択される。安静条件では、2 分間の測定期間の前半後半の各 1 分から分析区間が 1 区間ずつ選ばれ、相関次元、 α 波出現率が求められる。課題条件では、課題開始直後と終了直前の各 30 秒間を除く 4 分間について、1 分毎に分析区間が 4 つ選ばれた。相関次元の算出には、各分析区間について、Grassberger-Procaccia 法に基づいた Koukkou ら⁸⁾ の処理手順を改良した手法が使用された (別記)。周波数解析は、各分析区間について FFT で求めたパワースペクトルを基に、 α 波 (8-13Hz) の全帯域成分に対する出現率が算出された。こうして求められた相関次元、 α 波出現率について統計処理を行った。

3-2 結果と考察

表 1 は、相関次元と α 波出現率のそれぞれについて各条件の平均値をチャンネル毎に示している。結果の検定には、安静条件では閉・開眼の要因と 2 つの分析区間に基づく時間の要因 (1, 2 期) を被験者内要因、課題条件では課題の要因 (課題 1, 2) と 4 つの分析区間に基づく時間の要因 (1~4 期) を被験者内要因、いずれも被験者を繰り返しとした分散分析 (Analysis of Variance, ANOVA) が行われた。

安静条件の相関次元の分析結果を見ると、閉眼・開眼の効果に関しては、特に O1, O2 において閉眼時の次元が高くなってはいるが、その差は有意ではなかった。Fp1 で閉・開眼と時間の要因の間に有意な交互作用が見られたが、下位検定では有意差は検出されなかった。したがって、閉眼よりも開眼で次元が高くなるという過去の報告^{4,6)} に一致する傾向は伺えるものの、十分な確証は得られなかった。この点は、後述するように、本実験の被験者では α 波出現率でも閉眼と開眼の差が明瞭ではなかったことと関わるかもしれない。

課題条件による相関次元の差に関しては、全体的な傾向として課題 2の方が次元が高く、この効果は P4 で有意 ($p < .05$)、C3 と O2 ではわずかに有意水準に至らなかった ($p < .06$)。また、課題と時間の交互作用効果が、Fp1 及び O1 ($p < .05$)、P3 ($p < .01$) で有意であった。これは Fp1 では 3 期に、O1 では 2 期に、P3 では 1 期と 2 期に、課題 2 の次元が課題 1 を有意に上回ったことに起因するものであった (いずれも $p < .05$)。以上から、いくつかの位置と時間で EEG 相関次元は、暗算の負荷によって高まっており、これに関しては我々の仮説が支持された。また注目すべきはこの傾向が左半球に比較的多く観察されたことであり、これは暗算が左半球において主に遂行されると考えられること、及び暗算の負荷により右手のボタン押しに関わる活動にも何らかの負荷が加わったこと、と関連するものと

Table 1 Means and results of ANOVAs of each condition of correlation dimension and alpha power percentage .

		Fp1		Fp2		C3		C4		P3		P4		O1		O2	
correlation dimension during rest																	
E.C./E.O.	(E.C.)	(E.O.)	(E.C.)	(E.O.)	(E.C.)	(E.O.)	(E.C.)	(E.O.)	(E.C.)	(E.O.)	(E.C.)	(E.O.)	(E.C.)	(E.O.)	(E.C.)	(E.O.)	
Time	5.3	5.4	5.2	5.7	5.4	5.5	5.5	5.6	5.2	5.6	5.6	5.8	5.6	6.6	6.4	7.1	
	(t1)	(t2)	(t1)	(t2)	(t1)	(t2)	(t1)	(t2)	(t1)	(t2)	(t1)	(t2)	(t1)	(t2)	(t1)	(t2)	
	5.3	5.3	5.4	5.6	5.5	5.5	5.6	5.5	5.5	5.4	5.8	5.7	6.1	6.1	6.8	6.8	
interaction (EO/EC×Time)		*															
correlation dimension during task performance																	
Task	(Task1)	(Task2)	(Task1)	(Task2)	(Task1)	(Task2)	(Task1)	(Task2)	(Task1)	(Task2)	(Task1)	(Task2)	(Task1)	(Task2)	(Task1)	(Task2)	
Time	4.8	5.1	5.0	5.5	5.2	5.5 [*]	5.4	5.9	5.1	5.4	5.5	6.1 *	5.7	6.9	6.4	7.2 [*]	
	(t1)	(t2)	(t3)	(t4)	(t1)	(t2)	(t3)	(t4)	(t1)	(t2)	(t3)	(t4)	(t1)	(t2)	(t3)	(t4)	
	5.0	5.0	5.0	4.9	5.5	5.4	5.3	5.1	5.8	5.8	5.6	5.5	6.1	5.8	5.8	6.5	
interaction (Task×Time)		*														*	
α power percentage during rest																	
E.C./E.O.	(E.C.)	(E.O.)	(E.C.)	(E.O.)	(E.C.)	(E.O.)	(E.C.)	(E.O.)	(E.C.)	(E.O.)	(E.C.)	(E.O.)	(E.C.)	(E.O.)	(E.C.)	(E.O.)	
Time	14.3	4.1	13.8	4.0	27.7	9.3 [*]	30.6	9.8	36.9	9.3 *	33.8	12.2 *	30.0	7.8	30.3	11.5	
	(t1)	(t2)	(t1)	(t2)	(t1)	(t2)	(t1)	(t2)	(t1)	(t2)	(t1)	(t2)	(t1)	(t2)	(t1)	(t2)	
	12.0	6.5	10.4	7.4	18.4	18.7	21.0	19.4	25.1	20.9	24.2	21.8	19.7	18.0	22.7	19.1 [*]	
interaction (EO/EC×Time)																	
α power percentage during task performance																	
Task	(Task1)	(Task2)	(Task1)	(Task2)	(Task1)	(Task2)	(Task1)	(Task2)	(Task1)	(Task2)	(Task1)	(Task2)	(Task1)	(Task2)	(Task1)	(Task2)	
Time	4.8	3.4	4.7	3.8	23.7	16.0	23.4	19.6	31.9	23.5	30.0	25.6	25.3	22.2	22.7	20.2	
	(t1)	(t2)	(t3)	(t4)	(t1)	(t2)	(t3)	(t4)	(t1)	(t2)	(t3)	(t4)	(t1)	(t2)	(t3)	(t4)	
	4.3	4.1	3.8	4.2	19.2	19.7	22.3	18.1	20.2	23.0	22.3	20.5	24.5	26.6	23.6	21.8	
interaction (Task×Time)																	

Note Cells of remarkable effect are meshed.

E.C.: eyes closed, E.O.: eyes opened

Task1: listening condition (listening and pushing a button)

Task2: condition of mental calculation (listening, calculating and pushing a button)

t1, t2 and t1~t4: epochs of analysis in each condition

** p<.01, * p<.05, [*] p<.06

考えられる。一方、課題 2 での次元の高まりが P₄でも観察されたことは、右頭頂連合野の関与を反映するものと考えられるが、その意義については今後の検討が必要であろう。

次に課題中の相関次元の時間的变化を見ると、遂行の前半よりも後半の方が次元が低い傾向が見られ、P₃でこの時間の主効果が有意になった ($p < .01$)。これについては上述の課題と時間の交互作用効果と併せて検討する必要がある。その結果、時間に伴う次元の低下は課題 2 に顕著にみられるもので、遂行の初期では課題 2 の次元が課題 1 よりも高いが、このレベルは遂行の後半にかけて低下して課題 1 の次元に接近することが P₃と O₁において確かめられた ($p < .05$)。この課題と時間の効果は次のように解釈できるだろう。つまり課題 2 のような複雑な課題の場合、最初は遂行に不慣れでも、遂行がいくらか軌道にのるのに伴って脳機能のある種の精選が生じ、これが次元の低下傾向を招いた。これに対して課題 1 のような比較的単純な課題の場合、時間によるこのような変化は小さいか或いは見られないのである。ところでこれとは別に、各課題条件の各時期のそれぞれの相関次元と、閉眼安静中の次元を比較すると、上述の問題とも関連する結果が得られた。課題 1 遂行中の次元は後頭付近では安静時よりも高くなる時期はあるもののその差は有意ではなく、その他の位置では安静時よりもむしろ低下した (Fp₁の 2,3 期, Fp₂の 3 期, P₃の 4 期との差が有意, $p < .05$)。課題 2 に関しては安静時よりも全般的に次元が高くなる傾向はあるが、C₃の 1 期との差だけが有意であった ($p < .05$)。過去の報告によれば課題遂行中には安静時よりも次元が高まることになるが、本実験の課題 1 に関してはこの関係が成立しなかった。その理由としては、閉眼で何も行わずただ安静にするという状況よりも、むしろ課題 1 のような単純な課題の遂行によってかえって脳機能のまとまりが促されると考えられる。実はこれは、EEG 次元は脳機能のどのような局面を反映するのかという根本的な問題と関わるものである。つまり、低次元が generator の減少を反映するとしても、それは独立に機能していた閉鎖系が強く結合するためなのか、或いは複数の閉鎖系のいくつかの不活性になったためなのか^{8,10)}；高次元は脳が高度に複雑に機能しているのか、或いは脳機能がまとまりを欠いているのか¹⁰⁾、と言う問題である。これは今後の重要な課題であろう。

α 波出現率に関する結果については、表 1 の下段に示される。安静条件で閉眼の出現率が開眼を上回る傾向が見られ、この効果は P₃と P₄で有意であった ($p < .05$)。O₁, O₂に関しては閉眼と開眼の間に有意差は検出されなかったが、これは被験者の一人が開眼時に α 波出現率が高くなったことによるものと考えられる。課題条件の α 波出現率に関しては、課題 2 の方がいくらか出現率が低くなる傾向は見られるものの、有意な効果はいずれの部位においても検出されなかった。したがって、本実験で統制された課題条件の差は、 α 波出現率には明確に現れず、むしろ相関次元に反映されていたことが分かる。

4 まとめ

課題遂行中の EEG 非線形力学的側面を、EEG 相関次元を求めることによって検討した。健常な男子大学生 4 人が、処理の複雑性が異なる 2 種類の課題を遂行した。一方は選択的聴取と右手によるボタン押し反応を要する課題で、もう一方はこれらに加えて暗算を要す

るものであった。その結果、頭皮上のいくつかの部位で、複雑な処理を要する課題遂行中の方が EEG 相関次元の値が高くなり、そのような部位は左半球に多いことが示された。また、EEG 相関次元は、従来の周波数分析には反映されない脳の活動状態の測度となり得ることが示された。なお、実験は最終的には 10 人の被験者で行われた。これに関する報告は別の機会に行うこととする。

本研究の一部は学内共同研究費で行われた。記して感謝する。

文献

- 1) Lutzenberger, W., Preissl, H., Pulvermüller, F. 1995 Fractal Dimension of Electroencephalographic Time Series and underlying Brain Process. *Biological Cybernetics*, 73, 477-782.
- 2) Rapp, P.E., Bashore, T.R., Martinerie, J.M., Albano, A.M., Zimmerman, I.D. & Mess, A. I. 1989 Dynamics of Brain Electrical Activity. *Brain Topography*, 2, 99-118.
- 3) Pritchard, W.S. & Duke, D.W. 1992a Measuring Chaos in The Brain : A Tutorial Review of Nonlinear Dynamical EEG Analysis. *International Journal of Neuroscience*, 67, 31-80.
- 4) Pritchard, W.S. & Duke, D.W. 1992b Dimensional Analysis of No Task Human EEG using the Grassberger-Procaccia Method. *Psychophysiology*, 19, 182-192.
- 5) Grassberger, P. & Procaccia, I. 1983 Measuring the Strangeness of Strange Attractors. *Physica*, 9D, 189-208.
- 6) Xu Nan & Xu Jinghua 1988 The Fractal Dimension of EEG as a Physical Measure of Conscious Human Brain Activities. *Bulletin of Mathematical Biology*, 50, 559-565.
- 7) Lutzenberger, W., Elbert, T., Birbaumer, N., Ray, W.J. & Schupp, H. 1992 The Scalp Distribution of the Fractal Dimension of the EEG and Its Variation with Mental Tasks. *Brain Topography*, 5, 27-34.
- 8) Koukkou, M., Lehmann, D., Wackerman, J., Dvorak, I. & Hengger, B. 1993 Dimensional Complexity of EEG Brain Mechanisms in Untreated Schizophrenia. *Biological Psychiatry*, 33, 397-427.
- 9) Babloyantz, A., Salazar, J. M. & Nicolis, C. 1985 Evidence of Chaotic Dynamics of Brain Activity during the Sleep Cycle. *Physics Letters*, 111A, 152-156.
- 10) Röscke, J. & Aldenhoff, J.B. 1991 The Dimensionality of Human's Electroencephalogram during Sleep. *Biological Cybernetics*, 64, 303-313.
- 11) Röscke, J. & Aldenhoff, J.B. 1992 A Nonlinear Approach to Brain Function : Deterministic Chaos and Sleep EEG. *Sleep*, 15, 95-101.
- 12) Anokhin, A.P., Birbaumer, N., Lutzenberger, W., Nikolaev, A. & Vogel, F. 1996 Age Increases Brain Complexity. *Electroencephalography and clinical neurophysiology*, 99, 63-68.
- 13) Babloyantz, A. & Destexhe, A. 1986 Low-Dimensional Chaos in an Instance of Epilepsy. *Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 83, 3513-3517.
- 14) Lehnertz, K. & Elger, C.E. 1997 Neuronal Complexity Loss in Temporal Lobe Epilepsy :

- Effects of Carbamazepine on the Dynamics of the Epileptogenic Focus. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 103, 376-380.
- 15) Elbert, T., Lutzenberger, W., Rockstroh, B., Berg, P. & Colen, R. 1992 Physical Aspect of the EEG in Schizophrenics. *Biological Psychiatry*, 32, 595-606.
- 16) Wackermann, J., Lehmann, D., Dvorak, I. & Michel, C.M. 1993 Global Dimensional Complexity of Multi-Channel EEG Indicates Change of Human Brain Functional State after a Single Dose of a Nootropic Drug. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology*, 86, 193-198.
- 17) Gregson, R.A.M., Britton, L.A., Campbell, E.A. & Gates, G.R. 1990 Comparisons of the Nonlinear Dynamics of Electroencephalograms under Various Task Loading Conditions : a Preliminary Report. *Biological Psychology*, 31, 173-191.
- 18) Popivanov, D., Mineva, A. & Dushanova, J. 1998 Tracking EEG Signal Dynamics during Mental Tasks. *IEEE Engineering in Medicine and Biology*, 17, 89-95.

付録

相関次元の計算方法

EEG の時系列信号から、埋め込み次元 m に対する相関指数 ν_m を求める手順は、Koukkou らの方法を採用した⁸⁾。しかし、 ν_m から相関次元 D を求める手順に、彼らの方法は使えない。なぜならば、彼らは時系列信号から状態ベクトルのいくつかの標本を取り出して複数の ν_m を求め、その標準偏差を D の計算に用いるのに対し、我々は時系列信号から全ての状態ベクトルを計算に用いるので ν_m はただ1つとなり、標準偏差を定義できないためである。したがって、独自の計算方法を必要とする。

理想的な状態では、埋め込み次元 m に対する相関指数系列 $\nu_m(m)$ は単調増加となり、十分大きい m について飽和した ν_m が相関次元 D となることが知られている⁸⁾。しかし実際のデータ解析に当たっては、 ν_m は飽和せず、十分大きい m に対してもわずかず増加する。そこで、次の方法で ν_m の飽和を判定し、その値を相関次元の近似値とした。

(1) まず $\nu_m(m)$ において、11 点の移動平均を行う。これは、実際のデータに対しては、部分的に $\nu_m(m)$ は単調増加とならないためである。以降は、この移動平均した系列を処理に用いる。

(2) 隣接する $\nu_m(m)$ の差分が予め定めた判定指標を下回ることにより、 $\nu_m(m)$ の変動が十分小さいと見なして、飽和を判定する。飽和判定の指標として、差分の最大値の 5% の値を採用する。経験的に「 $\nu_m(1) - \nu_m(0)$ 」が最大となり、また $\nu_m(0)$ は 0 であるので、飽和判定指標として、 $\nu_m(1)$ の 5% の値を用いる。

(3) 差分「 $\nu_m(m) - \nu_m(m-1)$ 」を $m=2$ から順に調べていき、値が判定指標を初めに下回る m 以降を飽和と考える。そのときの ν_m が飽和値となり、この値を相関次元 D として、統計解析に用いる。