2 変数の周期関数に関するある性質について II

竹野 茂治 *

(平成 27 年 10 月 31 日受理)

On a feature for some periodic function of two variables II

Shigeharu TAKENO*

In the last report, we introduced a conjecture about when the period for x of the composed function $F(\phi(x+y), \phi(x-y))$ coincides with the one for y, where $F(u, v)$ is continuous and ϕ is a periodic continuous function, and showed some counterexamples in case of complex valued function, or discontinuous function, and one small result for period 0. In this article we extend the conjecture and show results for it under some conditions.

Keywords: period of composed function of two variables, multi-composed function of one variable, coincidence of periods, continuous function

1　はじめに

気体の運動方程式の周期解の存在性やその性質を調べるために, 波動方程式のダランベール解からの類推として,

$$F(\phi(x+st), \psi(x-st)) \tag{1}$$

の形の特殊解の適用を検討しているが, その関数の基本的な性質を調べる中で, 以下のような予想が考えられることを前回の報告で紹介した [1].

予想 1 $\phi(x)$ が周期連続関数, $F(u, v)$ が 2 変数の連続関数のとき, $f(x, y) = F(\phi(x+y), \phi(x-y))$ の x に関する基本周期と y に関する基本周期は常に等しい.

そして前回はこの予想に対し, $f(x, y)$ が x に関して定数であれば, $f(x, y)$ は y に関しても定数となること, および ϕ の連続性や実数値関数の条件を外した場合に現われる反例などを紹介し, 見ため以上に予想 1 の正否が難しいことなどを示した.

本稿では, 予想 1 に対して, その後にわかったことについて報告する.

*情報電子工学科 准教授　Department of Information and Electronics Engineering, Associate Professor

2　2 つの周期関数への拡張

まず最初に，予想 1 は，より元の式 (1) に近い形の次の形に拡張できることを報告する．

予想 2 $\phi(x)$，$\psi(x)$ が同じ周期を持つ周期連続関数，$F(u,v)$ が 2 変数の連続関数のとき，$f(x,y)=F(\phi(x+y),\psi(x-y))$ の x に関する基本周期と y に関する基本周期は常に等しい．

もちろん，予想 1 よりも予想 2 の方が一般的で，これが正しければ予想 1 は成立するが，例えば前回の報告 [1] で紹介した周期 0 に対する主張，すなわち，

$$f(x,y)=F(\phi(x+y),\phi(x-y)) \text{ が } x \text{ に関して定数なら，} y \text{ に関しても定数}$$

という命題は，予想 2 のように $F(\phi(x+y),\psi(x-y))$ に変えても言えることがわかった．証明は前の場合 [1] とほぼ同じで，証明中の 2 番目の ϕ を ψ に置き換えればよい．

この証明では，前の ϕ と後ろの ϕ が直接干渉しないので，後ろの方を ψ と置きかえてもうまくいくのであるが，予想 1 を予想 2 に拡張できるのは，この周期 0 の話だけではなく，次節以降の議論も根拠となっている．

3　関数に条件をつけた場合

次は，ある条件のついた状況での予想の解決について報告する．以後，まず予想 2 を次の形に書き直して考える．

予想 3 $\phi(x)$，$\psi(x)$ が周期 n ($n>1$: 整数) を持つ周期連続関数，$F(u,v)$ が 2 変数の連続関数のとき，次の 2 つが成り立つ．

1. 任意の X，Y に対して，
$$F(\phi(X+1),\psi(Y+1))=F(\phi(X),\psi(Y)) \tag{2}$$
であれば，
$$F(\phi(X+1),\psi(Y-1))=F(\phi(X),\psi(Y)) \tag{3}$$
も成り立つ．
2. 任意の X，Y に対して (3) であれば，(2) も成り立つ．

予想 2 と予想 3 は周期のスケールを変えているだけで，両者が同値であることは容易にわかるので，今後は予想 3 を考える．まずは，予想 3 の 1. の方を主に考えるが，今回の議論では 2. の方もほぼ同様である．

まず，区間 $0\leq x\leq n$ を n 等分し，それぞれの区間上の ϕ，ψ に名前をつけておく．

$$\phi_j(x)=\phi(x+j),\qquad \psi_j(x)=\psi(x+j)\qquad (j \text{ は整数，} 0\leq x\leq 1) \tag{4}$$

なお，考察を易しくするため，j は $1\leq j\leq n$ には限定せず，任意の整数とするが，ϕ，ψ の周期性により，任意の j，x に対し $\phi_{j+n}(x)=\phi_j(x)$，$\psi_{j+n}(x)=\psi_j(x)$ が成り立つことに注意せよ．

このとき (2) は,

$$F(\phi_{i+1}(X), \psi_{j+1}(Y)) = F(\phi_i(X), \psi_j(Y)) \tag{5}$$

が任意の $X, Y \in [0,1]$, 任意の整数 i, j に対して成り立つこと, となり, 同様に (3) は

$$F(\phi_{i+1}(X), \psi_{j-1}(Y)) = F(\phi_i(X), \psi_j(Y)) \tag{6}$$

が成り立つこととなる. よって, 予想 3 の 1. では, ϕ_j, ψ_j, F が (5) を満たしていると考える.

今, 関数族 $\{\phi_j(x)\}_j$ か $\{\psi_j(x)\}_j$ のいずれかが, 次の条件を満たすと仮定する.

条件 (H): 関数 $h_j(x)$ $(0 \le j < n)$ のうち, $h_0(x)$ は狭義単調増加で, $\mathrm{Im}\, h_0 \supset \mathrm{Im}\, h_m$ となる m $(0 < m < n)$ が存在する.

なお, 本稿では, 関数 $h(x)$ の値域を $\mathrm{Im}\, h$ と書き, また

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad h(x) < h(y) \quad (h(x) > h(y))$$

である場合, $h(x)$ を **狭義単調増加** (**狭義単調減少**) と呼び,

$$x < y \quad \Longrightarrow \quad h(x) \le h(y) \quad (h(x) \ge h(y))$$

である場合は **広義単調増加** (**広義単調減少**) と呼ぶことにする.

例えば $\{\phi_j(x)\}_j$ が条件 (H) を満たす場合, $\mathrm{Im}\, \phi_0 = [a, b]$ とすると $\eta = \phi_m \circ \phi_0^{-1}$ は $\eta : [a, b] \to [a, b]$ の連続関数で, $\phi_m = \eta(\phi_0)$ となるので, (5) より,

$$F(\phi_0(X), \psi_j(Y)) = F(\phi_m(X), \psi_{j+m}(Y)) = F(\eta(\phi_0(X)), \psi_{j+m}(Y))$$

が, すべての X, Y, j に対して成り立つことになる. よって, すべての $u \in [a, b]$, すべての j, Y に対して

$$F(u, \psi_j(Y)) = F(\eta(u), \psi_{j+m}(Y)) \tag{7}$$

が成り立つ.

今, n, m の最大公約数 $\gcd(n, m)$ を d とすると, n, m の最小公倍数 nm/d は n, m で割り切れる最小の自然数なので, (7) より

$$F(u, \psi_j(Y)) = F(\eta^{n/d}(u), \psi_{j+nm/d}(Y)) = F(\eta^{n/d}(u), \psi_j(Y)) \tag{8}$$

となる. ここで, η^k は **多重合成関数**, すなわち,

$$\eta^1(u) = \eta(u), \qquad \eta^k(u) = \eta(\eta^{k-1}(u)) \quad (k \ge 2)$$

を意味することとする.

(8) がすべての Y, j で成り立つので, 結局すべての $u \in [a, b]$, $v \in \mathrm{Im}\, \psi$ に対して,

$$F(u, v) = F(\eta^{n/d}(u), v) \tag{9}$$

が成り立つことになる.

同様に, $\{\psi_i\}_i$ が条件 (H) を満たす場合は,

$$F(u, v) = F(u, \eta^{n/d}(v)) \qquad (u \in \mathrm{Im}\, \phi, \quad v \in [a, b]) \tag{10}$$

が成り立つことがわかる.

4 多重合成関数

(9) や (10) を満たす $F(u,v)$ はある程度限られるので, それにより F, ϕ_i, ψ_j が (6) を満たす可能性がでてくるが, 条件 (9) や (10) が $F(u,v)$ に与える制限については, $[a,b]$ 上の 1 変数の連続関数 $G(u)$ に対して, 条件

$$G(\eta^k(u)) = G(u) \qquad (u \in [a,b]) \tag{11}$$

が $G(u)$ に与える制限を考えればよい.

今, $\xi(u) = \eta^k(u)$ とすると, (11) より

$$G(u) = G(\xi(u)) = G(\xi^2(u)) = \cdots$$

となるので, $G(u)$ の連続性により, 集合 $A(u) = \overline{\{\xi^j(u)\}_j}$ の上で $G(u)$ はすべて同じ値を取ることになるが, $A(u)$ は必ずしも大きな集合になるとは限らない. つまり, $\xi(u)$ にある種の対称性があると $\{\xi^j(u)\}_j$ は有限集合になることもあり, その場合は $A(u)$ は小さくなるので, それが $G(u)$ に与える制限は弱くなる. 逆に $\xi(u)$ の対称性が低いと, $A(u)$ は大きくなり, $G(u)$ はその広い範囲で定数とならねばならず, (11) が $G(u)$ に与える制限は強くなる.

その制限を調べるために, 区間 $[a,b]$ を, 同値関係

$$u \sim v \quad \Leftrightarrow \quad G(u) = G(v)$$

によって同値類分割すると, 各同値類 $[u] = G^{-1}(G(u))$ は, $G(v)$ が $G(u)$ に等しいような v の集合であるが, $G(u)$ は連続なので $[u]$ は閉集合であり, また上で見たように $[u] \supset A(u)$ となる. この同値類は, $[a,b]$ をこのような閉集合の族で分割し, 例えば,

- $[u] = [a,b]$ (すなわち $G(u)$ が $[a,b]$ 上定数)
- $[u]$ がすべて有限集合

のような場合もあるが, かなり複雑な状況も考えられる.

例えば, 同値類分割が可算個の閉集合で, $G(u)$ が Cantor 関数 [3], すなわちほとんど至るところ定数関数であるが, $[0,1]$ から $[0,1]$ への上への広義単調増加な連続関数となるような例もありうる. よって, 同値類分割により ξ から G への制限を正確に決定するのは容易ではない.

また, $\eta(u)$ や $\xi(u)$ が単調でない場合も考えると, 数列 $\{\xi^j(u)\}_j$ はカオス的な振舞いをすることが知られていて [2], そのような場合の $G(u)$ への制限を決定することも簡単ではない.

よって, ここでは η が広義単調な場合のみを考えるが, この場合は (11) から $G(u)$ を完全には決定できなくても, 我々の目的には十分な, 以下の (12), (13) を導き出せることがわかった.

命題 4 G, η が (11) を満たしている場合,

1. η が広義単調増加ならば
$$G(\eta(u)) = G(u) \qquad (u \in [a,b]) \tag{12}$$
が成り立つ.
2. η が広義単調減少で k が奇数ならば (12) が成り立つ.
3. η が広義単調減少で k が偶数ならば
$$G(\eta^2(u)) = G(u) \qquad (u \in [a,b]) \tag{13}$$
が成り立つ.

この命題 4 より, 予想 3 に対して次のことが示される.

命題 5 $\{\phi_i\}_i$ が条件 (H) を満たし, ϕ_m が広義単調で, $d = \gcd(n,m)$ に対し, 以下のいずれかの場合は, 予想 3 は正しい.

- ϕ_m が広義単調増加で, $d \leq 2$ のとき.
- ϕ_m が広義単調減少で, n/d が奇数でかつ $d \leq 2$ のとき.
- ϕ_m が広義単調減少で, $d = 1$ で n が偶数のとき.

さらに, 上の ϕ_j をすべて ψ_j に置きかえたものも成り立つ.

この命題 5 は, 命題 4 により示される. 例えば, (12) により $F(u,v) = F(\eta(u),v)$ となる場合は, (5) を用いると,
$$\begin{aligned} F(\phi_i(X),\psi_j(Y)) &= F(\phi_m(X),\psi_{j+m-i}(Y)) = F(\eta(\phi_0(X)),\psi_{j+m-i}(Y)) \\ &= F(\phi_0(X),\psi_{j+m-i}(Y)) = F(\phi_i(X),\psi_{j+m}(Y)) \end{aligned} \tag{14}$$
となり, $d = \gcd(n,m) \leq 2$ であれば $pm - qn = -2$ となる自然数 p, q が存在し, よって, 周期 n と (14) と (5) を用いると,
$$F(\phi_i(X),\psi_j(Y)) = F(\phi_i(X),\psi_{j-2}(Y)) = F(\phi_{i+1}(X),\psi_{j-1}(Y))$$
が得られ, (6) が成り立つことになる. 命題 5 の最初の 2 つの場合は, 命題 4 の 1., 2. に対応し, このようにして示される.

なお, この場合, $d = 1$ ならばすべての $F(\phi_i(X),\psi_j(Y))$ が $F(\phi_0(X),\psi_0(Y))$ に等しく, $d = 2$ ならば, $i + j$ が奇数か偶数かによって $F(\phi_0(X),\psi_1(Y))$ か $F(\phi_0(X),\psi_0(Y))$ に等しくなる.

命題 5 の最後の場合は, 命題 4 の 3. により $F(u,v) = F(\eta^2(u),v)$ となり, よって $Z = \phi_0^{-1}(\phi_m(X))$ とすれば $\phi_0(Z) = \phi_m(X)$ より
$$\phi_m(Z) = \eta(\phi_0(Z)) = \eta(\phi_m(X)) = \eta^2(\phi_0(X))$$
となるので,
$$\begin{aligned} F(\phi_i(X),\psi_j(Y)) &= F(\phi_m(X),\psi_{j+m-i}(Y)) = F(\phi_0(Z),\psi_{j+m-i}(Y)) \\ &= F(\phi_m(Z),\psi_{j+2m-i}(Y)) = F(\eta^2(\phi_0(X)),\psi_{j+2m-i}(Y)) \\ &= F(\phi_0(X),\psi_{j+2m-i}(Y)) = F(\phi_i(X),\psi_{j+2m}(Y)) \end{aligned} \tag{15}$$

が得られる. $d = \gcd(n, m) = 1$ で n は偶数だから, $\gcd(n, 2m) = 2$ となり, よってこの場合も 周期 n と (15) と (5) を用いて

$$F(\phi_i(X), \psi_j(Y)) = F(\phi_i(X), \psi_{j-2}(Y)) = F(\phi_{i+1}(X), \psi_{j-1}(Y))$$

となる.

(6) から (5) を導く場合もほぼ同様であり, また $\{\psi_j\}_j$ が命題 5 の条件を満たす場合も同様で, その場合は条件 (9) の代わりに (10) を用いればよい. これで命題 5 が成り立つことが示される.

5　命題 4 の証明

この節では, 命題 4 の証明を紹介する.

まず, $\eta(u)$ が広義単調増加である場合は, $\eta^j(u) \leq \eta^{j+1}(u)$ なので数列 $\{\eta^j(u)\}_j$ $(\subset [a, b])$ は広義単調増加数列となる. よって, すべての $u \in [a, b]$ に対してその極限

$$\lim_{j\to\infty} \eta^j(u) = \alpha(u)$$

が存在する. なお, $\alpha(u)$ は u に関して連続とは限らない. $G(u)$ の連続性と (11) より,

$$G(u) = G(\eta^k(u)) = G(\eta^{kj}(u)) \to G(\alpha(u)) \quad (j \to \infty)$$

となり, よって $G(u) = G(\alpha(u))$ がわかる. 一方,

$$G(\eta(u)) = G(\eta^{k+1}(u)) = G(\eta^{kj+1}(u)) \to G(\alpha(u)) \quad (j \to \infty)$$

となるので, よって $G(\eta(u)) = G(\alpha(u)) = G(u)$ となることがわかる.

$\eta(u)$ が広義単調減少の場合は, $\eta^2(u)$ が広義単調増加となるので, 上と同様にして

$$\lim_{j\to\infty} \eta^{2j}(u) = \beta(u)$$

の極限が存在する. よって,

$$G(u) = G(\eta^k(u)) = G(\eta^{2kj}(u)) \to G(\beta(u)) \quad (j \to \infty)$$

より $G(u) = G(\beta(u))$ となる. k が奇数の場合は,

$$G(\eta(u)) = G(\eta^{k+1}(u)) = G(\eta^{k(2j+1)+1}(u)) \to G(\beta(u)) \quad (j \to \infty)$$

となり, よって $G(\eta(u)) = G(\beta(u)) = G(u)$ が言える.

k が偶数の場合は,

$$G(\eta^2(u)) = G(\eta^{k+2}(u)) = G(\eta^{2kj+2}(u)) \to G(\beta(u)) \quad (j \to \infty)$$

となり, よって $G(\eta^2(u)) = G(\beta(u)) = G(u)$ がわかる. これで命題 4 が証明された.

なお，最後の場合は，一般には $G(\eta(u)) = G(u)$ は言えない．例えば，$[a,b] = [0,1]$，$\eta(u) = 1-u$，$G(u) = u$ とすれば，k が偶数のときは $\eta^k(u) = u$ となるので，

$$G(\eta^k(u)) = G(\eta^2(u)) = G(u)\ (= u)$$

は成り立つが，$G(\eta(u)) = 1-u$ なので $G(u)$ に等しくはならない．

また，$\eta(u)$ が単調でない場合に命題 4 のようなものが成り立つ可能性については，簡単な反例も作れてはおらず，今のところはよくわからない．$\eta(u)$ が単調ではないと，$\eta(u) \neq u$ で，かつある $k\ (>2)$ に対し $\eta^k(u) = u$ となる u が存在する場合がある．

例えば，$\eta(u) = 4u(1-u)\ (0 \leq u \leq 1)$ の場合は，$u_1 \fallingdotseq 0.1170$ がそのような一つの値であり，$\eta^3(u_1) = u_1$ となる (図 1).

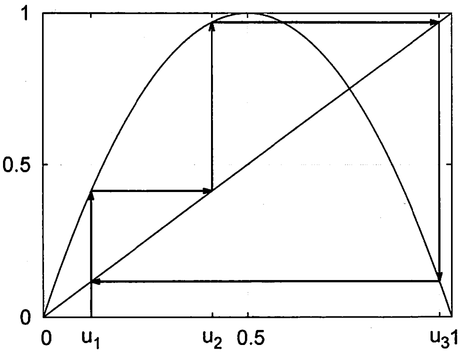

Fig. 1 $\eta^3(u_1) = u_1$

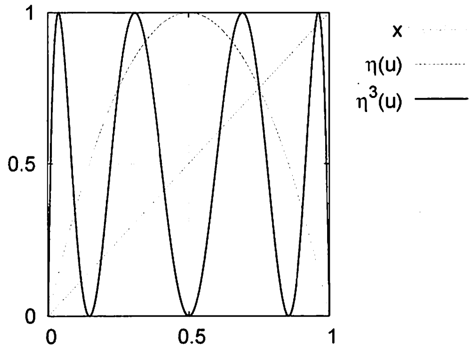

Fig. 2 $\eta(u)$ and $\eta^3(u)$

この場合，条件

$$G(\eta^3(u)) = G(u) \tag{16}$$

は $u = u_1$，$u = u_2 = \eta(u_1)$，$u = u_3 = \eta(u_2)$ では自明な式となり，$G(u)$ には何ら制限を与えないが，一方で

$$G(\eta(u)) = G(u) \tag{17}$$

の方は $G(u_1) = G(u_2) = G(u_3)$ という制限を与えるので，(17) の方が (16) よりも条件が真に強くなるように見える．しかし，実際には $\eta^3(u)$ は図 2 のように $\eta(u)$ よりも振動する関数となり，合成関数の微分より，$(\eta^n(u))' = 0$ となる u は，$(\eta^{n-1}(u))' = 0$ となる u をすべて含むため，$\eta^n(u)$ は n の増加に伴い上下の振動がどんどん細かくなる．よって，証明はしていないが，多分この $\eta(u)$ の場合は，n が増えるとすべての u の範囲にまんべんなく振動が起き，そのため $(\eta^n)^{-1}(\{u\})$ が徐々に $[0,1]$ で稠密な集合になっていくため，(17) の場合も (16) の場合も，いずれも $G(u)$ は定数以外にありえないのでないかと思われる．

つまり，η が単調ではない場合，$\eta^k(u_1) = u_1$ となる点 u_1 は一見命題 4 の反例を作りそうだが，そのような η はその範囲で増加，減少をするので η^n は振動が細かくなっていき，(16) と (17) が $G(u)$ に与える制限の差がなくなってしまう，という構造になっている．

よって，η が単調ではない場合も命題 4 の類似物が成立する可能性はある．

6 最後に

本稿では, 前回の報告[1] 以後にわかった事実として,

- 予想 1 を, より元の形に近い予想 2 に拡張できること
- 周期 0 の場合の前回の結果は予想 2 の形でも成り立つこと
- ϕ のいずれかが ψ が条件 (H) と単調性, および n, m に関するある種の条件を満たす場合には予想 2 が成立すること
- その証明のために, 1 変数の多重合成関数に関する命題 4 を示せたこと

などを紹介したが, 命題 5 で仮定した ϕ, ψ の条件はかなり強く, 一般の連続的な周期関数とはまだかなり距離がある. 例えば, 条件 (H) から, x の範囲を 1 の幅で切ったときに ϕ か ψ のいずれかは単調な部分を 2 箇所以上持ち, かつそれぞれの値域にも包含関係が必要となるが, もちろんそれを満たさない周期関数はたくさんある. また今回のような手法は逆に ϕ か ψ がそのような条件を満たしている場合にしか使えない方法なので, そうではない関数には今のところ手だてがなく, 予想 2 の完全な解決にはまだかなり遠いと感じている.

ただし, 今回の命題 5 は, 予想 2 の反例を検討する際に考えなければいけない範囲をせばめてくれているし, ある種の条件の元では確かに予想 2 が成立することを示しているので, 予想 1 を予想 2 に拡張できることの根拠にもなっている.

また, 5 節の最後に述べたように, 単調ではない η の場合には命題 4 はどうなるのか, という問題自体にも興味があるので, それも今後検討していきたい.

さらに, 今回は検討しなかったが, 元々の主題である気体の方程式に対して, ϕ, ψ が不連続な場合に (1) の形の関数を解とするような周期解の問題に対する研究も続けていきたいと考えている.

参考文献

[1] 竹野茂治: 2 変数の周期関数に関するある性質について; 新潟工科大学紀要, **17**, 13–17, 2012.

[2] 合原一幸: カオス – カオス理論の基礎と応用; サイエンス社, 1990.

[3] 伊藤清三: ルベーグ積分; 裳華房, pp 41–43, 1963.