新潟工科大学研究紀要 第27号

完備な Busemann 空間の一様凸性

冨澤 佑季乃*

(令和 4 年 11 月 30 日受理)

Uniform convexity of complete Busemann spaces

Yukino TOMIZAWA*

Normed linear spaces play an important role in pure and applied mathematics. In particular, Banach spaces are useful tools for problem-solving in computational science. Mathematicians have showed the geometric structure of Banach spaces since the introduction of uniform convexity by J. A. Clarkson. B. Beauzamy presented a characterization of uniform convexity of Banach spaces. This result was an important property to elucidate the geometric structure of Banach spaces. It contributed to solve various optimization problems.

On the other hand, H. Busemann constructed a theory of non-positive curvature of metric spaces. Using this theory, B. H. Bowditch introduced non-positive curvature spaces called Busemann spaces. Busemann spaces are more general than strictly convex Banach spaces. In recent years, Busemann spaces have attracted attention for their use in computational science. Against this background, the study of the geometric structure of Busemann spaces is valuable of pure and applied mathematics.

In this paper, I discuss uniform convexity of complete Busemann spaces. As a main result, I prove a characterization of uniform convexity of Busemann spaces. This is a generalization of the characterization of uniform convexity of Banach spaces given by Beauzamy.

Key words: Busemann space, uniformly convex, convex combination

1 概要

Busemann 空間はノルム線型空間より一般化された空間であり, その特性や計算科学への応用が注目されている. 本研究の目的は, Busemann 空間がもつ幾何学的構造の解明で

* 工学科 (基礎教育・教養系) 講師
Lecturer, Field of Fundamental Education and Liberal Arts, Department of Engineering

ある. 本稿では, 完備な Busemann 空間の一様凸性に関する特徴付けを報告する.

2 導入

距離空間の一種であるノルム線型空間は, 純粋数学や応用数学の様々な分野で重要な役割を果たしてきた. 特に代表される Banach 空間は, 計算科学において有用な道具として用いられている. Banach 空間の幾何学的構造は J. A. Clarkson [6] による一様凸性の導入を発端として明らかにされてきた. Banach 空間の幾何学的性質である凸性を議論する上では, 複数の点による凸結合が重要な要素である. B. Beauzamy [3] は 3 点による凸結合を用いて Banach 空間の一様凸性に関する特徴付けを示した. この結果 (後に記述する補題 5.1 と定理 5.2) は, Banach 空間の幾何学的構造を解明する重要な特性であった. これにより明らかになった Banach 空間の性質が, 最適化問題を解く手法などに応用されていった.

一方, H. Busemann [5] は距離関数における凸性の基本的特徴に基づいて, 距離空間の非正曲率の理論を構築した. この理論を用いて, B. H. Bowditch [4] は非正曲率空間の Busemann 空間 を導入した. Busemann 空間は (厳密には狭義凸な) Banach 空間よりも一般的な距離空間であり, 近年では計算科学などでその利用手法が注目されている. このような背景から, Busemann 空間の幾何学的構造を解明することは, 純粋のみならず応用数学の発展に繋がる研究として価値がある.

本稿では完備な Busemann 空間の一様凸性について議論する. 特に主結果として, 一様凸性に関する特徴付けを報告する. これは Beauzamy により示された Banach 空間の一様凸性に関する特性を Busemann 空間へ一般化したものである.

3 Busemann 空間

以下, 実数全体を $\mathbf{R}$ で表す. (X,d) を距離空間 (metric space), $[0,l]\subset\mathbf{R}$ を実数の区間とする. 連続写像 $\gamma:[0,l]\to X$ が測地線 (geodesic path) であるとは, $d(\gamma(t_1),\gamma(t_2))=|t_1-t_2|$ がすべての $t_1,t_2\in[0,l]$ に対して成り立つことである. X が**一意な測地距離空間** (*uniquely geodesic space*) であるとは, すべての二点 $x,y\in X$ が一意な測地線で結ばれていることをいう. $x,y\in X$ を端とする測地線を $[x,y]$ で表す.

点 $z\in[x,y]$ と $t\in[0,1]$ に対して $d(x,z)=td(x,y), d(z,y)=(1-t)d(x,y)$ であるとき, $z=(1-t)x\oplus ty$ で表す. これを二点 $x,y\in X$ の凸結合 (convex conbination) という. 一般的に, 測地距離空間の三点以上の凸結合は結合する順序に依存する. すなわち, 三

点 $x, y, z \in X$ と $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$ となる $\{\alpha_i\}_{i=1}^{3} \subset [0,1]$ に対する凸結合

$$\alpha_1 x \oplus (1-\alpha_1)\left(\frac{\alpha_2}{1-\alpha_1} y \oplus \frac{\alpha_3}{1-\alpha_1} z\right), \quad \alpha_2 y \oplus (1-\alpha_2)\left(\frac{\alpha_1}{1-\alpha_2} x \oplus \frac{\alpha_3}{1-\alpha_2} z\right)$$

は同じ点であるとは限らない.

一意な測地距離空間 X が **Busemann 空間** (*Busemann space*) であるとは, 任意の二つの測地線 $\gamma_1 : [0, l_1] \to X$ と $\gamma_2 : [0, l_2] \to X$ に対して $(t_1, t_2) \mapsto d\big(\gamma_1(t_1), \gamma_2(t_2)\big)$ で定義される写像 $[0, l_1] \times [0, l_2] \to \mathbf{R}$ が凸になることをいう [4, p. 576, Def.]. Busemann 空間 X は次を満たす:

(1)[2, p. 4, Prop. 1.1.5] すべての $x, y, z \in X$ と $t \in [0,1]$ に対して

$$d(z, (1-t)x \oplus ty) \leq (1-t)d(z, x) + td(z, y). \tag{1}$$

(2)[9, p. 40, Def. 6.5] すべての $x, y \in X$ と $t, s \in [0,1]$ に対して

$$d\big((1-t)x \oplus ty, (1-s)x \oplus sy\big) = |t-s|d(x, y). \tag{2}$$

Busemann 空間の具体例としては Euclid 空間, 狭義凸ノルム線形空間 (よって狭義凸 Banach 空間も), 双曲空間, $\mathbf{R}$-trees などがある [2].

4　測地距離空間での一様凸性

測地距離空間 (X, d) 内の二点 $x, y \in X$ に対して, 点 $m \in [x, y]$ が x と y の**中点** (*midpoint*) であるとは, $d(x, y) = 2d(x, m) = 2d(m, y)$ を満たすことをいい, $m = \frac{x}{2} \oplus \frac{y}{2}$ で表される. 完備な距離空間 X において X が測地距離空間であることとすべての X 内の二点間に中点が存在することは同値である [2, p. 2, Prop. 1.1.3].

一意な測地距離空間 (X, d) が**一様凸** (*uniformly convex*) であるとは, 任意の $r > 0$ と $\epsilon \in (0, 2]$ に対して $\delta \in (0, 1]$ が存在して, $d(a, x) \leq r,\ d(a, y) \leq r$ かつ $d(x, y) \geq \epsilon r$ を満たす $a, x, y \in X$ に対して

$$d\left(a, \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y\right) \leq \Big(1 - \delta\Big)r$$

が成り立つことをいう [7, p. 3, Def. 2.3]. このとき $r > 0$ と $\epsilon \in (0, 2]$ に対して, 次で定まる写像 $\delta(r, \epsilon) : (0, \infty) \times (0, 2] \to (0, 1]$ を *modulus of convexity* という:

$$\delta(r, \epsilon) := \inf\left\{1 - \frac{1}{r} d\left(a, \frac{1}{2}x \oplus \frac{1}{2}y\right) \ :\ d(a, x) \leq r,\ d(a, y) \leq r,\ d(x, y) \geq \epsilon r\right\}.$$

Busemann 空間において modulus of convexity が次を満たすことは, その定義から示すことができる:

補題 4.1. *Busemann 空間* (X,d) *が一様凸のとき,* $r>0$ *を固定した modulus of convexity は実関数* $\delta(r,\epsilon):(0,2]\to(0,1]$ *として非減少である.*

Proof. $0<\epsilon_1\le\epsilon_2\le 2$ とする. modulus of convexity の定義より, $d(a,x)=d(a,y)=r$, $d(x,y)=\epsilon_2 r$ のとき, $d\big((1/2)x\oplus(1/2)y,a\big)=\big(1-\delta(r,\epsilon_2)\big)r$ を得る. ここで $t=(\epsilon_2-\epsilon_1)/2\epsilon_2$, $p=(1-t)x\oplus ty$, $q=tx\oplus(1-t)y$ とおく. 式 (1) より, $d(a,p)\le r$, $d(a,q)\le r$ を得る. また式 (2) より, $d(p,q)=\epsilon_1 r$ を得る. したがって X の一様凸性より, $d\big((1/2)p\oplus(1/2)q,a\big)\le\big(1-\delta(r,\epsilon_1)\big)r$ となる. ゆえに

$$\delta(r,\epsilon_1)\le 1-\frac{1}{r}d\Big(\frac{p}{2}\oplus\frac{q}{2},a\Big)=1-\frac{1}{r}d\Big(\frac{x}{2}\oplus\frac{y}{2},a\Big)=\delta(r,\epsilon_2).$$

□

一様凸な Busemann 空間については非拡大写像の不動点の存在などが研究されており, 近年は最適化問題への応用なども考えられている [1]. 一方 Banach 空間は, その幾何学的性質と非拡大写像の不動点の関連性が研究されており [8], その結果は最適化問題に関係している. このような背景から, 狭義凸 Banach 空間の一般化である Busemann 空間の幾何学的性質を明らかにすることは, Busemann 空間における非拡大写像の不動点の性質の解明, 更には最適化問題への応用に繋がると期待できる. このような目的の下, 本稿では完備な Busemann 空間の一様凸性に関する特徴付けを示す.

5 主結果

まず, 既存の結果である Banach 空間 の一様凸性に関する特徴付けについて確認する. Banach 空間 $(E,\|\cdot\|)$ が一様凸であるとは, 各 $\epsilon\in(0,2]$ に対して $\delta(\epsilon)>0$ が存在して, $\|x\|=\|y\|=1$ かつ $\|x-y\|\ge\epsilon$ を満たす $x,y\in E$ に対して $\|x+y\|/2\le 1-\delta(\epsilon)$ が成り立つことをいう. 一様凸 Banach 空間において, 次が成り立つ.

補題 5.1. *[3, p. 191, Lem. 2]* $(E,\|\cdot\|)$ *を一様凸 Banach 空間として,* $x,y\in E$ *が* $\|x\|=\|y\|=1$ *かつ* $x\neq y$ *を満たすとする.* $\epsilon:=\|x-y\|$ *とおく. このときすべての* $t\in[0,1]$ *に対して次が成り立つ:*

$$\left\|\frac{x+ty}{2}\right\|\le\frac{1+t}{2}-t\delta(\epsilon).$$

補題 5.1 を用いることで, Banach 空間の一様凸性に関する特徴付けが可能である.

定理 5.2. *[3, p. 190, Prop. 1]* $(E, \|\cdot\|)$ を *Banach* 空間とする. E が一様凸であることと次は同値：すべての $\epsilon \in (0,2]$ に対して $\eta(\epsilon) > 0$ が存在して, $x, y \in E$ に対して $\|x\| \leq 1$, $\|y\| \leq 1$ かつ $\|x - y\| \geq \epsilon$ ならば次を満たす：

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 \leq \Big(1 - \eta(\epsilon)\Big) \left(\frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} \right).$$

この性質に対して, 完備な一様凸 Busemann 空間における一般化を考える. Banach 空間のベクトル $(x+ty)/2$ に対応する Busemann 空間上の点は $x_3/2 \oplus \big((1-t)x_1 \oplus tx_2\big)/2$ で表せるが, 距離に線形性がないため, この凸結合では補題 5.1 と同等の議論を行うことができない. したがって, $(x+ty)/2$ に相当する別の凸結合

$$\frac{1-t}{2} x_1 \oplus \frac{1+t}{2} \left(\frac{t}{1+t} x_2 \oplus \frac{1}{1+t} x_3 \right)$$

を用いて議論を行う必要がある. 補題 5.1 は次の様に一般化される.

補題 5.3. *[11, p. 157, Thm. 3.2]* (X, d) を完備な一様凸 *Busemann* 空間として, $x_1, x_2, x_3 \in X$ と $\epsilon \in (0,2]$ が $d(x_1, x_2) = d(x_1, x_3) = r > 0$ かつ $d(x_2, x_3) = \epsilon r$ を満たすとする. このときすべての $t \in [0,1]$ に対して次が成り立つ:

$$d\left(x_1, \frac{1-t}{2} x_1 \oplus \frac{1+t}{2} \left(\frac{t}{1+t} x_2 \oplus \frac{1}{1+t} x_3 \right) \right) \leq r \left(\frac{1+t}{2} - t\delta(r, \epsilon) \right).$$

また, 定理 5.2 の一般化である, 完備な Busemann 空間の一様凸性に関する特徴付けは, 下記の定理 5.4 で与えられる. 十分性は式 (3) に $t = 1$ を代入すれば明らか. 必要性は補題 5.3 を用いることで示される.

定理 5.4. (X, d) を完備な *Busemann* 空間とする. X が一様凸であることと次は同値：すべての $\epsilon \in (0,2]$ に対して $\eta(\epsilon) > 0$ が存在して, $t \in [0,1]$ と異なる三点 $x_1, x_2, x_3 \in X$ に対して $d(x_1, x_2) = d(x_1, x_3) = r$ かつ $d(x_2, x_3) = \epsilon r$ ならば次を満たす：

$$\begin{aligned} & d\left(x_1, \frac{1-t}{2} x_1 \oplus \frac{1+t}{2} \left(\frac{t}{1+t} x_2 \oplus \frac{1}{1+t} x_3 \right) \right)^2 \\ & \leq \Big(1 - \eta(\epsilon)\Big) \frac{d(x_1, x_3)^2 + d(x_1, (1-t)x_1 \oplus tx_2)^2}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Proof. 初めに十分性を示す. 式 (3) に $t = 1$ を代入すると,

$$d\left(x_1, \frac{1}{2}x_2 \oplus \frac{1}{2}x_3\right) \le r\sqrt{1-\eta(\epsilon)}.$$

したがって, X は $\delta(r,\epsilon) = 1 - \sqrt{1-\eta(\epsilon)}$ を有する一様凸である.

次に必要性を示す. 補題 5.3 より

$$\begin{aligned}\frac{d\left(x_1, \frac{1-t}{2}x_1 \oplus \frac{1+t}{2}\left(\frac{t}{1+t}x_2 \oplus \frac{1}{1+t}x_3\right)\right)^2}{\frac{1}{2}\left(d(x_1,x_3)^2 + d(x_1,(1-t)x_1 \oplus tx_2)^2\right)} &\le \frac{r^2\left(\frac{1+t}{2} - t\delta(r,\epsilon)\right)^2}{\frac{1}{2}\left(r^2 + \left(td(x_1,x_2)\right)^2\right)} \\ &\le \frac{\left(\frac{1+t}{2} - t\delta(r,\epsilon)\right)^2}{\frac{1}{2}(1+t^2)} =: \varphi(t).\end{aligned}$$

また任意の $t \in [0,1]$ に対して $\epsilon_t := d(x_3,(1-t)x_1 \oplus tx_2)/r$ とおく. ϵ_t は ϵ に依存する値であり, $\epsilon_t > 0$ かつ

$$\max \epsilon_t = \begin{cases} \epsilon \ (1 \le \epsilon) \\ 1 \ (\epsilon < 1) \end{cases}$$

であることに注意. ここで ϵ の場合分けを行う.

($\epsilon \le \epsilon_t/2$ の場合) 三角不等式より,

$$\begin{aligned}(1-t)r = d(x_2,(1-t)x_1 \oplus tx_2) &\ge d(x_3,(1-t)x_1 \oplus tx_2) - d(x_2,x_3) \\ &\ge r\left(\epsilon_t - \frac{\epsilon_t}{2}\right) = \frac{\epsilon_t r}{2}.\end{aligned}$$

よって $t \le 1 - \epsilon_t/2$ である. ここで

$$\varphi(t) \le \frac{\left(\frac{1+t}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}(1+t^2)} =: \hat{\varphi}(t)$$

であり実関数 $\hat{\varphi}(t)$ は $t \in [0,1]$ に対して狭義単調増加 [3, p. 193, Lem. 3] なので,

$$\varphi(t) \le \hat{\varphi}\left(1 - \frac{\epsilon_t}{2}\right) = \frac{(1-\frac{\epsilon_t}{4})^2}{\frac{1}{2}\left(1 + \left(1-\frac{\epsilon_t}{2}\right)^2\right)}.$$

実関数 $2(1-u/4)^2/\left(1+(1-u/2)^2\right)$ は $u = 0$ で最大値 1 をとり, $u \in [0,4]$ に対して狭義単調減少なので, 上記の不等式の右辺は 1 未満である. ゆえに

$$1 - \varphi(t) \ge 1 - \frac{(1-\frac{\epsilon_t}{4})^2}{\frac{1}{2}\left(1 + \left(1-\frac{\epsilon_t}{2}\right)^2\right)} = \frac{\epsilon_t^2}{2(\epsilon_t^2 - 4\epsilon_t + 8)} > 0.$$

($\epsilon > \epsilon_t/2$ の場合) 補題 4.1 より $\delta(r,\epsilon) \geq \delta(r,\epsilon_t/2)$. よって

$$\varphi(t) \leq \frac{\left(\frac{1+t}{2} - t\delta(r,\epsilon_t/2)\right)^2}{\frac{1}{2}(1+t^2)} =: \psi(t).$$

実関数 $\psi(t)$ の最大値は $t = 1 - 2\delta(r,\epsilon_t/2)$ のとき

$$\psi\big(1 - 2\delta(r,\epsilon_t/2)\big) = 2(\delta(r,\epsilon_t/2) - 1)\delta(r,\epsilon_t/2) + 1 \tag{4}$$

であり, modulus of convexity $\delta(r,\epsilon)$ の定義よりこれは 1 未満である. ゆえに

$$1 - \varphi(t) \geq 1 - \psi(t) \geq 2(1 - \delta(r,\epsilon_t/2))\delta(r,\epsilon_t/2) > 0.$$

以上より,

$$0 < \eta(\epsilon) \leq \min\left\{\frac{\epsilon_t^2}{2(\epsilon_t^2 - 4\epsilon_t + 8)}, 2(1 - \delta(r,\epsilon_t/2))\delta(r,\epsilon_t/2)\right\}$$

となる $\eta(\epsilon)$ を取れば, 次の式を得られる:

$$\begin{aligned} &d\left(x_1, \frac{1-t}{2}x_1 \oplus \frac{1+t}{2}\left(\frac{t}{1+t}x_2 \oplus \frac{1}{1+t}x_3\right)\right)^2 \\ &\leq \big(1 - \eta(\epsilon)\big)\frac{d(x_1,x_3)^2 + d(x_1,(1-t)x_1 \oplus tx_2)^2}{2}. \end{aligned}$$

□

6 謝辞

本研究は, 日本学術振興会 科学研究費助成事業 学術研究助成基金助成金 若手研究「非線形距離空間の幾何学的特徴付け」(令和 2〜5 年度) : JSPS 科研費 JP20K14333 の助成を受けたものである.

参考文献

[1] Ariza-Ruiz D., Leuştean L., and López-Acedo G., *Firmly nonexpansive mappings in classes of geodesic spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **366(8)** (2014): 4299–4322.

[2] Bačák M., Convex Analysis and Optimization in Hadamard Spaces. Vol. 22. In: Nonlinear Analysis and Applications, De Gruyter, 2014.

[3] Beauzamy B., Introduction to Banach Spaces and their Geometry. Vol. 68. Elsevier, 2011.

[4] Bowditch B. H., *Minkowskian Subspaces of Non-Positively Curved Metric Spaces*, Bulletin of the London Mathematical Society **27(6)** (1995): 575–584.

[5] Busemann H., *Spaces with non-positive curvature*, Acta Mathematica **80(1)** (1948): 259–310.

[6] Clarkson J.A., *Uniformly convex spaces*, Transactions of the American Mathematical Society **40** (1936): 396–414.

[7] Espínola R., Fernández-León A., and Piątek B., *Fixed points of single- and set-valued mappings in uniformly convex metric spaces with no metric convexity*, Fixed Point Theory and Applications (2010): Article ID 169837, 1–16.

[8] Kato M., Maligranda L., and Takahashi Y., *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Mathematica **144(3)** (2001): 275–295.

[9] Kirk W. and Shahzad N., Fixed Point Theory in Distance Spaces. Cham, Switzerland: Springer International Publishing, 2014.

[10] Papadopoulos A., Metric Spaces, Convexity and Nonpositive Curvature. IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics 6, European Mathematical Society, 2005.

[11] Tomizawa Y., *Distances between convex combinations in Hadamard spaces*, Linear and Nonlinear Analysis **6(1)** (2020): 153–166.