

# 1 次元等エントロピー流に対する Tartar 方程式の解法の改良

竹野 茂治\*

(令和 4 年 10 月 31 日受理)

An improvement for solving of Tartar's equation  
for one dimensional isentropic gas dynamics

Shigeharu TAKENO\*

Using the compensated compactness theory, DiPerna proved the existence of weak solutions of one dimensional isentropic gas dynamics equations with arbitrary large initial data for discrete adiabatic exponents, and Ding-Chen-Luo extended the result for continuous adiabatic exponents. In their results, it is important to solve Tartar's equation for Young measure and weak entropy pairs, but the part is complicated. In this article, we see an improvement of the part for discrete exponents. In our method, the argument for the part is more simple, and we can relax the restriction of the basic function of the weak entropies.

**Keywords:** isentropic gas dynamics, compensated compactness theory, improvement for solving Tartar's equation, Young measure, discrete adiabatic exponent

## 1 はじめに

本稿では、等エントロピー流方程式に対する補償コンパクト性理論における、いわゆる Tartar 方程式

$$\langle \nu, \eta \tilde{q} - \tilde{\eta} q \rangle = \langle \nu, \eta \rangle \langle \nu, \tilde{q} \rangle - \langle \nu, \tilde{\eta} \rangle \langle \nu, q \rangle \quad (1)$$

を解いて

$$\nu = \nu_{(t,x)}(U) = \delta_{\bar{U}(t,x)}(U) \quad (2)$$

と決定する DiPerna ら [3], [2] による証明の、1 つの改良版を提示する。

---

\* 工学科 (基礎教育・教養系) 准教授

Associate Professor, Field of Fundamental Education and Liberal Arts, Department of Engineering

元の方程式は、1次元の等エントロピー流を記述する保存則形の偏微分方程式

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + P(\rho))_x = 0 \end{cases} \quad (t > 0, x \in R) \quad (3)$$

で、 $\rho = \rho(t, x) \geq 0$  は気体密度、 $u = u(t, x)$  は速度、 $P = P(\rho) = A\rho^\gamma$  は圧力、 $A > 0$ 、 $1 < \gamma < 3$  は定数で、 $\gamma$  は断熱指数とも呼ばれる。前者は質量保存則、後者は運動量保存則を意味し、よって (3) は「連立保存則方程式」とも呼ばれる。

この方程式の初期値問題の解の存在証明方法として、補償コンパクト性理論 (compensated compactness theory) というものがあり、それを用いて、 $A\rho^\gamma$  形の圧力に対しては、大きさや変動に制限をつけない初期値に対する (3) の初期値問題の弱解の存在が、まず DiPerna (1983)<sup>[3]</sup> によって断熱指数  $\gamma$  が  $\gamma = (2m + 3)/(2m + 1)$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ) の場合に示され、Ding-Chen-Luo (1985, 1986)<sup>[2]</sup> によってそれが任意の  $1 < \gamma \leq 5/3$  に拡張され、Lions-Perthame-Tadmor (1994)<sup>[5]</sup> により  $\gamma \geq 3$  の場合、そして Lions-Perthame-Souganidis (1996)<sup>[4]</sup> により  $1 < \gamma < 3$  の場合が示され、等エントロピー流の  $P = A\rho^\gamma$  の形に対しては、 $\gamma > 1$  のすべての  $\gamma$  に対して弱解の問題はほぼ解決している。

その後もその理論を適用できる圧力項  $P(\rho)$  を広げる試みが行われているが (Chen-LeFloch<sup>[1]</sup>, Makino<sup>[7]</sup>, Lu<sup>[6]</sup>)、それには従来の証明の方針自体の見直しも必要になる。また、DiPerna (1983)<sup>[3]</sup> の結果に対する拡張である Ding-Chen-Luo<sup>[2]</sup> の方法は、長大な計算の連続であるためその読解も難しく、それらの証明の改良、簡略化も、この分野の発展のためには必要だと思われる。

本稿では、Ding-Chen-Luo<sup>[2]</sup> らの証明の改良の前段階として、DiPerna<sup>[3]</sup> の結果、すなわち  $\gamma = (2m + 3)/(2m + 1)$  の場合に対する証明の、特に Tartar 方程式の解法部分に関する若干の改良を紹介する。

なお、Ding-Chen-Luo<sup>[2]</sup> は DiPerna<sup>[3]</sup> の方法をそのまま実数の  $\gamma$  に拡張したもので、本稿の手法は Ding-Chen-Luo<sup>[2]</sup> の方法にも適用が可能であるが、Lions-Perthame-Tadmor<sup>[5]</sup>、Lions-Perthame-Souganidis<sup>[4]</sup> の手法は、DiPerna<sup>[3]</sup> や Ding-Chen-Luo<sup>[2]</sup> らの Darboux エントロピーではなく、核エントロピーを用いた方法なので、本稿の改良はそれらには当てはまらない。むしろ、逆に本稿の改良は、Lions らの方法<sup>[5], [4]</sup> からヒントを得ている部分もある。

## 2 弱エントロピーと Young 測度

まず、本稿で必要になる弱エントロピーと Young 測度について簡単に説明する。

方程式 (3) は、 $\rho(t, x)$ 、 $u(t, x)$  が滑らかであれば、

$$\begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} u & \rho \\ P'(\rho)/\rho & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho \\ u \end{bmatrix}_x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

と書けるが、これに対し、

$$(q_\rho, q_u) = (\eta_\rho, \eta_u) \begin{bmatrix} u & \rho \\ P'(\rho)/\rho & u \end{bmatrix} \quad (5)$$

を満たす  $\rho, u$  の関数の組  $(\eta(\rho, u), q(\rho, u))$  を, 「一般化エントロピー対」と呼び,  $\eta$  を「エントロピー」,  $q$  を「エントロピー流束」と呼ぶ. エントロピー対は, 滑らかな  $\rho(t, x), u(t, x)$  に対しては,

$$\eta(\rho(t, x), u(t, x))_t + q(\rho(t, x), u(t, x))_x = 0 \quad (6)$$

の追加保存則形の式を満たし, 物理的なエントロピー対  $(\rho S, \rho S u)$  に対応することからそう名付けられている. また, 真空  $\rho = 0$  で 0 となるエントロピー  $(\eta(0, u) = 0)$  を「弱エントロピー」と呼ぶ. 大きさや変動に制限のない初期値に対する初期値問題では, 弱解に真空が現れうるため弱エントロピーを用いる必要がある. なお, 滑らかとは限らない弱解に対しては, 一般には (6) は成立しないが, 逆に弱解の物理的な適切性の保証として, 弱解は, 凸なエントロピー  $\eta$  に対するエントロピー不等式

$$\eta(\rho(t, x), u(t, x))_t + q(\rho(t, x), u(t, x))_x \leq 0 \quad (7)$$

を満たす必要がある. これは, 物理でのエントロピー増大則 ( $-\rho S$  が凸) に対応する.

補償コンパクト性理論では, 非線形な汎弱極限を記述する, 以下の Young 測度と呼ばれるものが重要な働きをする:

$\Omega \subset \mathbb{R}^M, A \subset \mathbb{R}^N$  で  $A$  は有界閉集合,  $f_n \in L^\infty(\Omega; A)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) とすると, 以下を満たす  $\{f_n\}_n$  の部分列  $\{f_{n_j}\}_j$  と,  $\bar{f} \in L^\infty(\Omega; A)$  と,  $\Omega$  のほとんど至るところの  $x$  に対して定義される  $\mathbb{R}^N$  上の確率測度 (非負で全測度 1 の Borel 測度) の族  $\{\nu_x(y)\}_{a.e. x \in \Omega}$  が存在する.

1.  $f_{n_j} \rightarrow \bar{f}(x) \quad L^\infty(\Omega)weak*$
2.  $\nu_x(A) = 1$
3.  $\mathbb{R}^N$  上の任意の連続関数  $G(y)$  に対し,

$$\bar{G}(x) = \langle \nu_x(y), G(y) \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} G(y) \nu_x(dy)$$

は  $\Omega$  上の可測関数で,

$$G(f_{n_j}(x)) \rightarrow \bar{G}(x) \quad L^\infty(\Omega)weak* .$$

この確率測度の族  $\{\nu_x(y)\}_x$  を  $\{f_{n_j}\}_j$  に対する「Young 測度」と呼び,  $\nu_x(y)$  に関する  $G(y)$  の積分を  $\langle \nu_x, G \rangle, \langle \nu, G \rangle, \langle G \rangle$  などのように書く.

一様有界な関数列  $f_n(x)$  からは汎弱収束 ( $weak*$ ) するような部分列が取れるが, 汎弱収束のような弱い収束では,  $f_{n_j}(x)$  が  $\bar{f}(x)$  に収束しても, 一般にはそれを非線形関数  $G(y)$  に代入した  $G(f_{n_j}(x))$  は,  $G(\bar{f}(x))$  に収束するとは言えない. 例えば  $L^\infty(\mathbb{R})$  の汎弱収束では  $\cos nx \rightarrow 0$  であるが,  $\cos^2 nx \rightarrow 1/2$  となる. その  $G(f_{n_j}(x))$  の極限を,  $G(y)$  の確率測度での積分 (平均値) として記述するような測度が, Young 測度である. ちなみに,  $\{\cos nx\}$  に対する Young 測度  $\nu_x(y)$  は, 非特異な絶対連続測度  $\nu_x(y) = dy/(\pi\sqrt{1-y^2})$  となる<sup>[10]</sup>.

$G(f_{n_j}(x))$  の極限が通常の  $G(\bar{f}(x))$  になることは, Young 測度で言えば  $\nu_x(y)$  がデルタ関数  $\delta_{\bar{f}(x)}(y)$  であることを意味し, その場合は  $f_{n_j}(x)$  が  $\bar{f}(x)$  に強収束する.

方程式 (3) に対する近似解の有界性から得られる Young 測度  $\{\nu_{(t,x)}(\rho, u)\}_{(t,x)}$  を, この方程式に豊富に存在する弱エントロピー対に対して適用したのが Tartar 方程式 (2) に現れる各項で, さらに (3) に対して補償コンパクト性理論を用いて得られる関係式が Tartar 方程式 (2) である. Young 測度  $\{\nu_{(t,x)}(\rho, u)\}_{(t,x)}$  がデルタ関数であることを決定することが, 近似解の強収束性と弱解の存在を示すことになるので, この方法では任意の弱エントロピー対に対して成立する Tartar 方程式 (2) から Young 測度を決定することが目標となる.

### 3 Riemann 不変量と Darboux の公式

方程式 (3) に対して,

$$w = u + \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta} \rho^\theta, \quad z = u - \frac{\sqrt{A\gamma}}{\theta} \rho^\theta \quad (8)$$

で定まる  $w, z$  を「Riemann 不変量」と呼ぶ. ここで  $\theta$  は  $\theta = (\gamma - 1)/2$  の定数で,  $1 < \gamma < 3$  では  $0 < \theta < 1$  である.

$(\rho, u)$  という組は,  $\rho > 0$  の範囲では  $(w, z)$  という組に 1 対 1 に対応し,

$$u = \frac{w+z}{2}, \quad \rho = \left( \frac{\theta}{\sqrt{A\gamma}} \frac{w-z}{2} \right)^{1/\theta} \quad (9)$$

と表される. よって滑らかで  $\rho > 0$  な解に対しては,  $(\rho, u)$  で考えることと  $(w, z)$  で考えることは同等となる. 弱エントロピー対  $(\eta, q)$  や Young 測度  $\nu_{(t,x)}(\rho, u)$  も,  $\rho, u$  の関数,  $\rho, u$  の測度と考える代わりに  $w, z$  の関数,  $w, z$  の測度, と考えることもできる.  $(w, z)$  で考えると方程式 (3) も対角化され, 色々見通しが良くなり, 本稿でもほぼ  $(w, z)$  で考察する.

補償コンパクト性理論で用いられる (3) の近似解は, 一様有界性を持つ人工粘性近似や Lax-Friedrichs 型の差分近似が用いられる. それらは, ある不変領域を持つことが知られている. まず,  $(w, z)$  平面の三角領域  $\Sigma(w_0, z_0)$  を以下のように定める.

$$\Sigma(w_0, z_0) = \{(w, z); w \leq w_0, z \geq z_0, w \geq z\} \quad (10)$$

なお,  $w \geq z$  は  $\rho \geq 0$  に対応し, これは常に満たす必要がある. この  $\Sigma(w_0, z_0)$  は  $(w, z)$  平面,  $(\rho, u)$  平面では図 1 のようになる. なお, これは  $(\rho, u)$  平面のものと  $(w, z)$  平面のもの

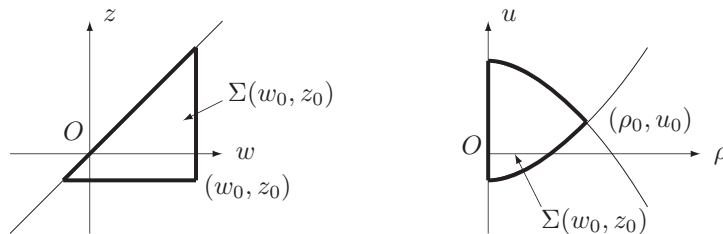


Fig. 1  $\Sigma(w_0, z_0)$  on  $(w, z)$  plane and on  $(\rho, u)$  plane

を同一視し, 同じ  $\Sigma(w_0, z_0)$  で表すことにする. また, 厳密に言えば弱解は  $\rho = 0$  ( $w = z$ ) の値を取り得て, その部分では  $u$  は未定義になってしまうのであるが, 弱解は正確には  $(\rho, u)$

の対ではなく,  $(\rho, m) = (\rho, \rho u)$  の対で考えるので,  $\rho = 0$  も問題なく弱解として含み得る. 本稿では, 弱解と  $\rho = 0$  に関する議論は詳しくは行わないが, 参考文献<sup>[9]</sup>を参照のこと. 三角領域  $\Sigma(w_0, z_0)$  に関して次が成り立つことが知られている.

初期値  $(\rho_0(x), u_0(x))$  がすべての  $x$  に対してある三角領域  $\Sigma(w_0, z_0)$  に含まれていれば, そこから構成する (3) の人工粘性近似解, あるいは Lax-Friedrichs 型差分近似解  $(\rho^\Delta(t, x), u^\Delta(t, x))$  は,  $t > 0$  に対し常に  $\Sigma(w_0, z_0)$  に含まれる.

これにより, この近似解の部分列  $(\rho_n(t, x), u_n(t, x))$ , その汎弱極限  $(\bar{\rho}(t, x), \bar{u}(t, x))$ , およびそれに対する Young 測度  $\{\nu_{(t,x)}(\rho, u)\}_{(t,x)}$  が取れ,  $\nu_{(t,x)}$  は  $\Sigma(w_0, z_0)$  以外では 0 となる. そして, 補償コンパクト性理論により, この Young 測度  $\nu_{(t,x)}$  と, 任意の弱エントロピー対  $(\eta, q), (\bar{\eta}, \bar{q})$  に対して, 冒頭の Tartar 方程式 (1) が, ほとんどいたるところの  $(t, x)$  ( $t > 0$ ) に対して成り立つことが示される. ここまでは標準的な流れで, この部分に変更はない. 詳しくは参考文献<sup>[9]</sup>等を参照のこと.

あとは, Tartar 方程式を解くのに必要な弱エントロピー対を, 以下のいわゆる Darboux の公式から具体的に生成して, それを使って考察する.

$1 < \gamma \leq 5/3$  のとき, 実数上の任意の連続関数  $\phi(s)$  に対して,

$$\begin{cases} \eta = \int_z^w (w-s)^m (s-z)^m \phi(s) ds \\ q = \lambda_2 \eta - \theta \int_z^w (w-s)^{m+1} (s-z)^m \phi(s) ds \end{cases} \quad (11)$$

は, (5) を満たす弱エントロピー対  $(\eta(0, u) = 0)$  となる. ここで,  $\lambda_2$  は

$$\lambda_2 = u + \sqrt{A\gamma} \rho^\theta = \frac{1+\theta}{2} w + \frac{1-\theta}{2} z$$

で,  $m$  は

$$m = \frac{1-\theta}{2\theta} = \frac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}.$$

この最後の  $m$  は, 逆に  $\gamma = (2m+3)/(2m+1)$  となり, DiPerna<sup>[3]</sup> は  $m$  を自然数とし, Ding-Chen-Luo<sup>[2]</sup> は  $m$  を 1 以上の実数としている. 本稿では,  $m$  を自然数として, DiPerna<sup>[3]</sup> と同じ  $\gamma$  の条件で考える.

弱エントロピー対は, この Darboux の公式 (11) により,  $\phi$  の自由度だけ存在し, ここから多くの種類のエントロピー対を生成できる. この Darboux の公式の形のエントロピー対を, 本稿では「Darboux エントロピー対」と呼ぶ. なお, 以後,  $q - \lambda_2 \eta = \sigma$  とする. Darboux エントロピー対に対しては

$$\sigma = q - \lambda_2 \eta = -\theta \int_z^w (w-s)^{m+1} (s-z)^m \phi(s) ds \quad (12)$$

となる.

本稿の議論で必要なエントロピー対を以下に紹介する.

- $a \in R$  に対して,  $\phi$  を  $\delta(s-a)$  に近づけた極限, 具体的には  $\phi_0(y) \in C_0^\infty(0,1)$ ,  $\int_0^1 \phi_0(y)dy = 1$  なる  $\phi_0(y)$  に対して  $\phi(s) = \phi_n(s) = n\phi_0(n(s-a))$  として  $n \rightarrow \infty$  により得られるエントロピー対

$$\begin{cases} \eta^{(0)} &= (w-a)^m(a-z)^m X_0(w, z; a) \\ \sigma^{(0)} &= -\theta(w-a)^{m+1}(a-z)^m X_0(w, z; a) = -\theta(w-a)\eta^{(0)} \\ q^{(0)} &= \lambda_2 \eta^{(0)} + \sigma^{(0)}. \end{cases} \quad (13)$$

ここで,  $X_0(w, z; a)$  は

$$X_0(w, z; a) = \begin{cases} 1 & (z \leq a < w \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \quad (14)$$

である (図 2). 詳しくは参考文献 [9] を参照. なお, このエントロピー対は, ほぼ Darboux の公式の積分を外して  $\phi$  を除いた形なので, これを本稿では「核エントロピー対」と呼ぶ.

- $a \in R$  に対して,  $\phi$  を  $-\delta'(s-a)$  に近づけた極限, 具体的には上の  $\phi_n(s)$  に対して  $\phi(s) = -\phi'_n(s)$  として  $n \rightarrow \infty$  により得られるエントロピー対

$$\begin{cases} \eta^{(1)} &= \{(w-a)^m(a-z)^m\}_a X_0(w, z; a) \\ &= m(w-a)^{m-1}(a-z)^{m-1}(w+z-2a)X_0(w, z; a) \\ \sigma^{(1)} &= -\theta\{(w-a)^{m+1}(a-z)^m\}_a X_0(w, z; a) \\ &= \theta\eta^{(0)} - \theta(w-a)\eta^{(1)} \\ q^{(1)} &= \lambda_2 \eta^{(1)} + \sigma^{(1)}. \end{cases} \quad (15)$$

$\eta^{(1)}, q^{(1)}, \sigma^{(1)}$  は,  $z < a < w$  では  $\eta^{(0)}, q^{(0)}, \sigma^{(0)}$  を  $a$  で微分したものになっている. なお, 厳密に言えば,  $(\eta^{(1)}, q^{(1)})$  は,  $m = 1$  の場合は  $w = a, z = a$  で連続ではないが,  $\nu_{(t,x)}$  での積分は可能で,  $\phi(s) = -\phi'_n(s)$  に対して成立する Tartar 方程式で, Lebesgue 収束定理による極限を取れば,  $(\eta^{(1)}, q^{(1)})$  に対しても Tartar 方程式が成立することが示される.

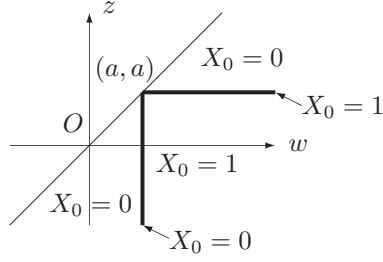
- $a \in R$  に対して  $\phi(s) = (d/ds)^{m+1}\psi_n(s)$  として得られる弱エントロピー対  $(\eta_n, q_n)$ . ここで  $\psi_n(s)$  は  $\psi_n(s) = n\psi_0(n(s-a))$  で,  $\psi_0(y)$  は  $R$  上滑らかで,

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} (1+|y|^2)\psi_0(y) = 0, \quad \psi_0(y) \in L^1(R) \quad (16)$$

とする. そして同じ条件を満たす  $\hat{\psi}_0$  に対して,  $(\eta_n, q_n)$  と同様にして構成した弱エントロピー対を  $(\hat{\eta}_n, \hat{q}_n)$  とし,  $\hat{\sigma}_n = \hat{q}_n - \lambda_2 \hat{\eta}_n$  とする.

この最後の  $\eta_n, \sigma_n$  を計算する.

$$\left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k (w-s)^m(s-z)^m, \quad \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k (w-s)^{m+1}(s-z)^m$$


 Fig. 2 function  $X_0$ 

は  $k < m$  では  $s = z, s = w$  で 0 になるので,  $m$  回部分積分すると,

$$\eta_n = \int_z^w Q_1(s) \psi'_n(s) ds, \quad \sigma_n = \int_z^w Q_2(s) \psi'_n(s) ds \quad (17)$$

となる. ここで,  $Q_1(s), Q_2(s)$  は

$$\begin{cases} Q_1(s) = \bar{Q}_1(w-s, s-z) = (-1)^m \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^m (w-s)^m (s-z)^m \\ Q_2(s) = \bar{Q}_2(w-s, s-z) = -\theta (-1)^m \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^m (w-s)^{m+1} (s-z)^m \end{cases} \quad (18)$$

の  $s$  に関する多項式であり, その境界値は

$$\begin{cases} Q_1(w) = \bar{Q}_1(0, w-z) = m!(w-z)^m \\ Q_1(z) = \bar{Q}_1(w-z, 0) = (-1)^m m!(w-z)^m \\ Q_2(w) = \bar{Q}_2(0, w-z) = 0 \\ Q_2(z) = \bar{Q}_2(w-z, 0) = (-1)^{m+1} \theta m!(w-z)^{m+1} \end{cases} \quad (19)$$

となる. もう 1 回部分積分をすると,

$$\begin{aligned} \eta_n &= [Q_1(s) \psi_n(s)]_{s=z}^{s=w} + \int_z^w R_1(s) \psi_n(s) ds \\ &= Q_1(w) \psi_n(w) - Q_1(z) \psi_n(z) + \int_z^w R_1(s) \psi_n(s) ds, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= [Q_2(s) \psi_n(s)]_{s=z}^{s=w} + \int_z^w R_2(s) \psi_n(s) ds \\ &= Q_2(w) \psi_n(w) - Q_2(z) \psi_n(z) + \int_z^w R_2(s) \psi_n(s) ds, \end{aligned} \quad (21)$$

$$R_j(s) = -\frac{\partial}{\partial s} Q_j(s) = -\frac{\partial}{\partial s} \bar{Q}_j(w-s, s-z) \quad (j = 1, 2) \quad (22)$$

となる.

#### 4 Tartar 方程式の解法

Tartar 方程式 (1) から  $\nu$  を決定する議論は, 前半部分と後半部分に分かれていて, その前半部分は,

$\nu_{(t,x)}$  の台, すなわち  $\nu_{(t,x)}$  が 0 でない集合の閉包 ( $\subset \Sigma(w_0, z_0)$ ) を含む, 最小の三角領域を  $\Sigma(w_1, z_1)$  とすると, その台は点  $(w_1, z_1)$  を含む.

であるが, ここは標準的な方法でよいので本稿では省略する. なお, その部分は, DiPerna<sup>[3]</sup> の漸近エントロピー対を使用する方法よりも, Lions-Perthame-Souganidis<sup>[4]</sup> による核エントロピー対を利用する方法の方がスマートである. 詳しくは参考文献<sup>[9]</sup> を参照.

また, 本節では断わらない限り  $(t, x)$  は固定して考えるので,  $\nu_{(t,x)}$  は  $\nu$  とともに略記する ( $(w_1, z_1)$  は  $(t, x)$  毎に決まる値). そして  $\nu$  での積分において, 本節では被積分関数は,  $\rho, u$  ではなく  $w, z$  を変数とする関数と見て考える.

本稿では, 後半部分, すなわち  $\nu$  の台が  $(w_1, z_1)$  のみである, ということを示す部分についての改良を行う. この後半部分では, 3 節で紹介した Darboux エントロピー対, 核エントロピー対から, (1) の左辺に表われる以下のような  $B = \eta\bar{q} - \bar{\eta}q$  の式を主に考える.

$$\begin{cases} B_{0,1} &= \eta^{(0)}q^{(1)} - \eta^{(1)}q^{(0)} &= \eta^{(0)}\sigma^{(1)} - \eta^{(1)}\sigma^{(0)} \\ B_n^{(0)} &= \eta^{(0)}q_n - \eta_n q^{(0)} &= \eta^{(0)}\sigma_n - \eta_n\sigma^{(0)} \\ B_n^{(1)} &= \eta^{(1)}q_n - \eta_n q^{(1)} &= \eta^{(1)}\sigma_n - \eta_n\sigma^{(1)} \\ B_n &= \eta_n\hat{q}_n - \hat{\eta}_n q_n &= \eta_n\hat{\sigma}_n - \hat{\eta}_n\sigma_n. \end{cases} \quad (23)$$

また,  $B_n^{(j)}$  ( $j = 0, 1$ ) の  $(\eta_n, q_n)$  を  $(\hat{\eta}_n, \hat{q}_n)$  に変えたものを  $\hat{B}_n^{(j)}$  とする.

DiPerna<sup>[3]</sup>, Ding-Chen-Luo<sup>[2]</sup> は,  $\psi_0, \hat{\psi}_0$  を  $C_0^\infty$  から取り, 強い制限を与えることで,  $\langle \eta_n \rangle, \langle q_n \rangle, \langle B_n^{(1)} \rangle$  が有界で,  $\langle B_n^{(0)} \rangle \rightarrow 0$  を示すことで  $\langle B_n \rangle \rightarrow 0$  を示すのであるが, むしろ次の関係式を用いることでその議論を易しくし,  $\psi_0, \hat{\psi}_0$  の制限を緩くすることができる.

**補題 1** 弱エントロピー対  $(\eta_i, q_i)$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) に対して  $B_{i,j} = \eta_i q_j - \eta_j q_i$  とすると,

$$\langle B_{1,2} \rangle \langle B_{3,4} \rangle - \langle B_{1,3} \rangle \langle B_{2,4} \rangle + \langle B_{1,4} \rangle \langle B_{2,3} \rangle = 0. \quad (24)$$

**補題 1 の証明** Tartar 方程式 (1) より

$$\langle B_{i,j} \rangle = \langle \eta_i \rangle \langle q_j \rangle - \langle \eta_j \rangle \langle q_i \rangle$$

となるから, これをそれぞれに代入して展開すれば得られる. なお, これは 4 次の行列式

$$\begin{vmatrix} \langle \eta_1 \rangle & \langle q_1 \rangle & \langle \eta_1 \rangle & \langle q_1 \rangle \\ \langle \eta_2 \rangle & \langle q_2 \rangle & \langle \eta_2 \rangle & \langle q_2 \rangle \\ \langle \eta_3 \rangle & \langle q_3 \rangle & \langle \eta_3 \rangle & \langle q_3 \rangle \\ \langle \eta_4 \rangle & \langle q_4 \rangle & \langle \eta_4 \rangle & \langle q_4 \rangle \end{vmatrix} = 0$$

の, 2 次の小行列式による Laplace 展開と同等である. ■

この補題 1 と (23) により,

$$\langle B_{0,1} \rangle \langle B_n \rangle - \langle B_n^{(0)} \rangle \langle \hat{B}_n^{(1)} \rangle + \langle \hat{B}_n^{(0)} \rangle \langle B_n^{(1)} \rangle = 0 \quad (25)$$

が得られるが, 本稿では Tartar の方程式 (1) を直接使うのではなく, 表面上は  $\eta, q$  に現れない  $B$  だけの関係式 (25) を用いて, さらに  $a$  による積分を用いることで, DiPerna<sup>[3]</sup>,



Ding-Chen-Luo<sup>[2]</sup> の行う長い評価の議論を簡略化する. なお,  $a$  による積分の利用は, Lions-Perthame-Souganidis<sup>[4]</sup> も用いている手法である.

**命題 2**  $h(a) = \langle B_{0,1} \rangle$  とすると,  $h(a)$  は,  $z_1 < a < w_1$  では正で, その外では 0 の連続関数.

**命題 2 の証明** (13), (15) より,

$$\begin{aligned} B_{0,1} &= \eta^{(0)}\sigma^{(1)} - \eta^{(1)}\sigma^{(0)} = \eta^{(0)}\theta\{\eta^{(0)} - (w-a)\eta^{(1)}\} + \theta(w-a)\eta^{(0)}\eta^{(1)} \\ &= \theta(\eta^{(0)})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

なので  $h(a) = \theta\langle(\eta^{(0)})^2\rangle \geq 0$  となる.

また,  $\eta^{(0)} = (w-a)^m(a-z)^m X_0(w, z; a)$  は,  $z > a$  または  $w < a$  では 0 であり,  $\nu$  の台は  $\Sigma(w_1, z_1)$  に含まれるので,  $a < z_1$  か  $a > w_1$  ならば  $B_{0,1}$  の台と  $\nu$  の台は交わらないので  $h(a) = \langle B_{0,1} \rangle = 0$  となる.

そして,  $\nu$  の台は点  $(w_1, z_1)$  を含み,  $z_1 < a < w_1$  の場合は  $(w_1, z_1)$  では  $\eta^{(0)} > 0$  なので  $h(a) > 0$  となることもわかる.

最後に  $h(a)$  の連続性であるが,  $B_{0,1} = \theta(\eta^{(0)})^2$  は  $z_1 < a < w_1$  で有界で  $a$  に関して連続なので, Lebesgue 収束定理により  $h(a)$  の連続性も成り立つ. ■

## 5 $B_n^{(j)}$ の評価と極限

$B_n^{(j)}$ ,  $B_n$  の評価には, 以下の補題を用いる.

**補題 3** (16) を満たす  $\psi_0(y)$  に対して  $\psi_n(s) = \psi_n(s; a) = n\psi_0(n(s-a))$  とすると, 任意の有限区間  $I = [p, q]$  に対して次が成り立つ.

1.  $(s-a)^k \psi_n(s)$  ( $k = 1, 2$ ) は  $s, a \in I$ ,  $n$  に関して有界で,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (s-a)^k \psi_n(s) = 0$$

2.  $f(s)$  が  $I$  上連続ならば,

$$J_n = \int_z^w f(s) \psi_n(s) ds$$

は,  $w, z, a \in I$  ( $z \leq w$ ),  $n$  に関して有界で, 以下が成り立つ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = f(a) \xi(w, z; a, r) \int_R \psi_0(y) dy,$$

ここで,  $r, \xi(w, z; a, r)$  は,

$$r = \frac{\int_0^\infty \psi_0(y) dy}{\int_R \psi_0(y) dy}, \quad \xi(w, z; a, r) = \begin{cases} 1 & (z < a < w \text{ のとき}) \\ r & (z = a < w \text{ のとき}) \\ 1-r & (z < w = a \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{上記以外 のとき}) \end{cases}$$

とする (図 3).

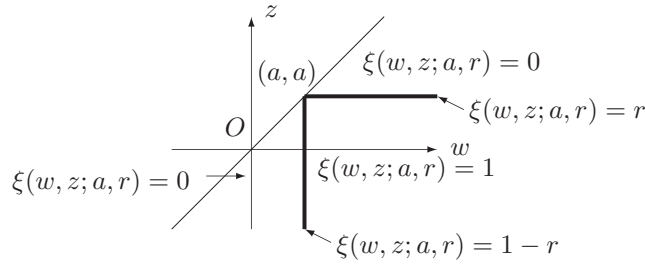


Fig. 3 function  $\xi(w, z; a, r)$

補題 3 の証明 1.  $S_n = n(s - a)$  とすると,

$$(s - a)^k \psi_n(s) = n(s - a)^k \psi_0(n(s - a)) = \frac{S_n^k \psi_0(S_n)}{n^{k-1}}$$

は (16) より一様有界で,  $s \neq a$  であれば (16) により 0 に収束し,  $s = a$  のときは  $S_n = 0$  より 0 となる.

2.  $Z_n = n(z - a), W_n = n(w - a)$  とすると,

$$\int_z^w |\psi_n(s)| ds = \int_{Z_n}^{W_n} |n\psi_0(n(s - a))| ds = \int_{Z_n}^{W_n} |\psi_0(y)| dy \leq \|\psi_0\|_{L^1} < \infty$$

なので,

$$|I_n| \leq \|f\|_{C(I)} \|\psi_0\|_{L^1}$$

より  $I_n$  は一様有界となる.  $n \rightarrow \infty$  に対しては,  $z = w$  なら  $I_n = 0$ ,

$$I_n = \int_{Z_n}^{W_n} f\left(a + \frac{y}{n}\right) \psi_0(y) dy$$

より,  $a < z < w$  ならば  $Z_n, W_n \rightarrow \infty$ ,  $z < w < a$  ならば  $Z_n, W_n \rightarrow -\infty$  となるのでこれらの場合は  $I_n \rightarrow 0$  となる.

$z = a < w$  の場合は,  $Z_n = 0, W_n \rightarrow \infty$  となるので,

$$I_n \rightarrow \int_0^\infty f(a) \psi_0(y) dy = f(a) r \int_R \psi_0(y) dy$$

となる. また,  $z < w = a$  のときは,  $Z_n \rightarrow -\infty, W_n = 0$  より

$$I_n \rightarrow \int_{-\infty}^0 f(a) \psi_0(y) dy = f(a) (1 - r) \int_R \psi_0(y) dy$$

となる. 最後に,  $z < a < w$  のときは,  $Z_n \rightarrow -\infty, W_n \rightarrow \infty$  より

$$I_n \rightarrow \int_{-\infty}^\infty f(a) \psi_0(y) dy = f(a) \int_R \psi_0(y) dy$$

となる. ■

次は, この補題 3 を用いて,  $B_n^{(0)}, B_n^{(1)}$  の評価を行う. まずは  $B_n^{(0)}$  から.

$\eta_n, \sigma_n$  は,  $u(X) = m!X^m$  とすると, (20), (21) と, 境界値 (19) により,

$$\begin{cases} \eta_n = u(w-z)\{\psi_n(w) + (-1)^{m+1}\psi_n(z)\} + \int_z^w R_1(s)\psi_n(s)ds \\ \sigma_n = (-1)^m\theta u(w-z)(w-z)\psi_n(z) + \int_z^w R_2(s)\psi_n(s)ds \end{cases} \quad (26)$$

と書ける. よって,  $B_n^{(0)}$  は

$$\begin{aligned} B_n^{(0)} &= \eta^{(0)}\sigma_n - \eta_n\sigma^{(0)} = \eta^{(0)}(\sigma_n + \theta(w-a)\eta_n) \\ &= \theta u(w-z)\eta^{(0)}\{(w-a)\psi_n(w) + (-1)^m(a-z)\psi_n(z)\} \\ &\quad + \eta^{(0)} \int_z^w \{R_2 + \theta(w-a)R_1\}\psi_n(s)ds \end{aligned} \quad (27)$$

となる. 補題 3 より  $(w-a)\psi(w), (z-a)\psi(z)$  は  $w, z, a \in [z_1, w_1]$  で有界で,  $n \rightarrow \infty$  のときに 0 に収束する. 積分項も有界で,  $R_3(a) = R_2(a) + \theta(w-a)R_1(a)$  とすると

$$\eta^{(0)}R_3(a)\xi(w, z; a, r) \int_{\mathbb{R}} \psi_0 dy \quad \left( r = \int_0^\infty \psi_0 dy / \int_{\mathbb{R}} \psi_0 dy \right) \quad (28)$$

に収束するから, 結局  $B_n^{(0)}$  は有界で, (28) に収束することがわかる.

次に  $B_n^{(1)}$  は,

$$\begin{aligned} B_n^{(1)} &= \eta^{(1)}\sigma_n - \eta_n\sigma^{(1)} = \eta^{(1)}(\sigma_n + \theta(w-a)\eta_n) - \theta\eta^{(0)}\eta_n \\ &= \theta u(w-z)\eta^{(1)}\{(w-a)\psi_n(w) + (-1)^m(a-z)\psi_n(z)\} \\ &\quad - \theta u(w-z)\eta^{(0)}\{\psi_n(w) + (-1)^{m+1}\psi_n(z)\} \\ &\quad + \eta^{(1)} \int_z^w \{R_2 + \theta(w-a)R_1\}\psi_n(s)ds - \theta\eta^{(0)} \int_z^w R_1\psi_n(s)ds \end{aligned} \quad (29)$$

となるが,  $\eta^{(1)}$  は  $[z_1, w_1]$  上有界なので, この 3 行の式のうち, 最初の行は  $B_n^{(0)}$  の場合と同様に有界で 0 に収束する. 2 行目の式は,  $\eta^{(0)}$  に  $(w-a)(a-z)$  が含まれているので, これもやはり  $B_n^{(0)}$  の場合と同様に有界で 0 に収束する. 3 行目の 2 つの積分項も有界で,

$$(\eta^{(1)}R_3(a) - \theta\eta^{(0)}R_1(a))\xi(w, z; r, a) \int_{\mathbb{R}} \psi_0 dy \quad (30)$$

に収束するから, 結局  $B_n^{(1)}$  は有界で (30) に収束する.

よって, Lebesgue 収束定理により, 以下がわかる.

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle B_n^{(0)} \rangle \rightarrow \langle \eta^{(0)}R_3\xi(w, z; a, r) \rangle \int_{\mathbb{R}} \psi_0 dy = p_1(r, a) \int_{\mathbb{R}} \psi_0 dy \\ \langle \widehat{B}_n^{(0)} \rangle \rightarrow \langle \eta^{(0)}R_3\xi(w, z; a, \widehat{r}) \rangle \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_0 dy = p_1(\widehat{r}, a) \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_0 dy \\ \langle B_n^{(1)} \rangle \rightarrow \langle (\eta^{(1)}R_3 - \theta\eta^{(0)}R_1)\xi(w, z; r, a) \rangle \int_{\mathbb{R}} \psi_0 dy = p_2(r, a) \int_{\mathbb{R}} \psi_0 dy \\ \langle \widehat{B}_n^{(1)} \rangle \rightarrow \langle (\eta^{(1)}R_3 - \theta\eta^{(0)}R_1)\xi(w, z; \widehat{r}, a) \rangle \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_0 dy = p_2(\widehat{r}, a) \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_0 dy \\ \left( r = \int_0^\infty \psi_0 dy / \int_{\mathbb{R}} \psi_0 dy, \quad \widehat{r} = \int_0^\infty \widehat{\psi}_0 dy / \int_{\mathbb{R}} \widehat{\psi}_0 dy \right) \end{array} \right. \quad (31)$$

ここから,

$$\langle B_n^{(0)} \rangle \langle \widehat{B}_n^{(1)} \rangle - \langle \widehat{B}_n^{(0)} \rangle \langle B_n^{(1)} \rangle \rightarrow (p_1(r, a)p_2(\widehat{r}, a) - p_1(\widehat{r}, a)p_2(r, a)) \int_R \psi_0 dy \int_R \widehat{\psi}_0 dy$$

となるから,  $\psi_0, \widehat{\psi}_0$  が

$$\frac{\int_0^\infty \psi_0 dy}{\int_R \psi_0 dy} = \frac{\int_0^\infty \widehat{\psi}_0 dy}{\int_R \widehat{\psi}_0 dy} \quad (32)$$

を満たせば,  $r = \widehat{r}$  となり, よって,

$$\langle B_n^{(0)} \rangle \langle \widehat{B}_n^{(1)} \rangle - \langle \widehat{B}_n^{(0)} \rangle \langle B_n^{(1)} \rangle \rightarrow 0 \quad (33)$$

となる. これと, (25) を組み合わせると, 以下が得られる.

**命題 4** 条件 (32) の元,  $h(a)\langle B_n \rangle$  は  $a \in [z_1, w_1]$  に関して有界で,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h(a)\langle B_n \rangle = 0.$$

## 6 $B_n$ の評価と極限

次に,  $B_n = \eta_n \widehat{\sigma}_n - \widehat{\eta}_n \sigma_n$  の評価, およびその極限を考察する.

本節では, (20) と (21) の式を使って,  $B_n$  を一旦行列式形に表す.

$$\vec{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}, \quad \vec{\Psi}_n(s) = \begin{bmatrix} \psi_n(s) \\ \widehat{\psi}_n(s) \end{bmatrix}, \quad \vec{R}(s) = \begin{bmatrix} R_1(s) \\ R_2(s) \end{bmatrix}$$

と書くことにすると,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \eta_n \\ \widehat{\eta}_n \end{bmatrix} &= Q_1(w)\vec{\Psi}_n(w) - Q_1(z)\vec{\Psi}_n(z) + \int_z^w R_1 \vec{\Psi}_n(s) ds, \\ \begin{bmatrix} \sigma_n \\ \widehat{\sigma}_n \end{bmatrix} &= Q_2(w)\vec{\Psi}_n(w) - Q_2(z)\vec{\Psi}_n(z) + \int_z^w R_2 \vec{\Psi}_n(s) ds \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} B_n &= \begin{vmatrix} \eta_n & \sigma_n \\ \widehat{\eta}_n & \widehat{\sigma}_n \end{vmatrix} \\ &= -Q_1(w)Q_2(z) \left| \vec{\Psi}_n(w) \vec{\Psi}_n(z) \right| + Q_1(w) \int_z^w R_2 \left| \vec{\Psi}_n(w) \vec{\Psi}_n(s) \right| ds \\ &\quad - Q_1(z)Q_2(w) \left| \vec{\Psi}_n(z) \vec{\Psi}_n(w) \right| - Q_1(z) \int_z^w R_2 \left| \vec{\Psi}_n(z) \vec{\Psi}_n(s) \right| ds \\ &\quad + Q_2(w) \int_z^w R_1 \left| \vec{\Psi}_n(s) \vec{\Psi}_n(w) \right| ds - Q_2(z) \int_z^w R_1 \left| \vec{\Psi}_n(s) \vec{\Psi}_n(z) \right| ds \\ &\quad + \int_z^w R_1(t) dt \int_z^w R_2(s) \left| \vec{\Psi}_n(t) \vec{\Psi}_n(s) \right| ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\left|\vec{Q}(w) \vec{Q}(z)\right| \left|\vec{\Psi}_n(w) \vec{\Psi}_n(z)\right| + \int_z^w \left|\vec{Q}(w) \vec{R}(s)\right| \left|\vec{\Psi}_n(w) \vec{\Psi}_n(s)\right| ds \\
 &\quad - \int_z^w \left|\vec{Q}(z) \vec{R}(s)\right| \left|\vec{\Psi}_n(z) \vec{\Psi}_n(s)\right| ds \\
 &\quad + \int_z^w dt \int_z^w R_1(t) R_2(s) \left|\vec{\Psi}_n(t) \vec{\Psi}_n(s)\right| ds \\
 &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4
 \end{aligned}$$

の形となる. なお,  $I_j$  は, その前の式の項を一つずつ順番に名付けることにする.

まずは  $I_1$  から考える. (19) より,

$$\begin{aligned}
 \left|\vec{Q}(w) \vec{Q}(z)\right| &= \begin{vmatrix} u(w-z) & (-1)^m u(w-z) \\ 0 & (-1)^{m+1} \theta(w-z) u(w-z) \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{m+1} \theta(w-z) u(w-z)^2
 \end{aligned}$$

であり, これは  $(w-z)^2$  を因数に含むので,

$$I_1 = v(w-z)(w-z)^2 \left|\vec{\Psi}_n(w) \vec{\Psi}_n(z)\right| = v(w-z) J_1$$

とすると,  $v(w-z) = (-1)^{m+1} \theta u(w-z)^2 / (w-z)$  で,  $W_n = n(w-a)$ ,  $Z_n = n(z-a)$  により

$$\begin{aligned}
 J_1 &= (w-z)^2 \left|\vec{\Psi}_n(w) \vec{\Psi}_n(z)\right| = n^2(w-z)^2 \left|\vec{\Psi}_0(W_n) \vec{\Psi}_0(Z_n)\right| \\
 &= (W_n - Z_n)^2 \left|\vec{\Psi}_0(W_n) \vec{\Psi}_0(Z_n)\right| \\
 &= \left|W_n^2 \vec{\Psi}_0(W_n) \vec{\Psi}_0(Z_n)\right| - 2 \left|W_n \vec{\Psi}_0(W_n) Z_n \vec{\Psi}_0(Z_n)\right| \\
 &\quad + \left|\vec{\Psi}_0(W_n) Z_n^2 \vec{\Psi}_0(Z_n)\right|
 \end{aligned}$$

の形に変形でき, (16) と補題 3 により  $w, z, a \in [z_1, w_1]$  に対する  $J_1$  の一様有界性と 0 への収束性が得られる. なお,

$$\vec{\Psi}_0(y) = \begin{bmatrix} \psi_0(y) \\ \hat{\psi}_0(y) \end{bmatrix}$$

とした. よって,  $I_1$  は一様有界で,  $n \rightarrow \infty$  のときに 0 に収束する.

次は  $I_4$  を考える.  $I_4$  は二重積分の形にまとめているが, 実際には,  $R_i \psi_n$  の積分と  $R_j \hat{\psi}_n$  の積分の積の差の形になっていて, よって,  $R_j$  の連続性と補題 3 により  $w, z, a \in [z_1, w_1]$  に対して一様有界で, その極限は,

$$I_4 \rightarrow R_1(a) R_2(a) \begin{vmatrix} \xi(w, z; r, a) \int_z^w \psi_0 dy & \xi(w, z; r, a) \int_z^w \psi_0 dy \\ \xi(w, z; \hat{r}, a) \int_z^w \hat{\psi}_0 dy & \xi(w, z; \hat{r}, a) \int_z^w \hat{\psi}_0 dy \end{vmatrix} = 0$$

となる.

あとは  $I_2, I_3$  であるが, これらは 0 には収束しないので, 単独で考える代わりに, 連続関数  $h(a)$  をかけて  $a$  で積分したものを考える. まずは,  $I_2$  から.

$$\int_{\mathbb{R}} h(a) I_2 da = \int_{\mathbb{R}} h(a) da \int_z^w \left|\vec{Q}(w) \vec{R}(s)\right| \left|\vec{\Psi}_n(w) \vec{\Psi}_n(s)\right| ds$$

であるが,  $a$  を  $n(w - a) = y$  と置換し,  $s$  を  $n(w - s) = t$  と置換すると,  $a = w - y/n$ ,  $s = w - t/n$  で,

$$\vec{\Psi}_n(w) = n\vec{\Psi}_0(n(w - a)) = n\vec{\Psi}_0(y), \quad \vec{\Psi}_n(s) = n\vec{\Psi}_0(n(s - a)) = n\vec{\Psi}_0(y - t)$$

となるので,

$$\begin{aligned} & \int_R h(a)I_2 da \\ &= \int_R h\left(w - \frac{y}{n}\right) dy \int_0^{n(w-z)} \left| \vec{Q}(w) \vec{R}\left(w - \frac{t}{n}\right) \right| \left| \vec{\Psi}_0(y) \vec{\Psi}_0(y - t) \right| dt \end{aligned}$$

となるが,  $z \leq w - t/n \leq w$  より  $|\vec{Q}(w) \vec{R}|$  は  $w, z \in [z_1, w_1]$  に関して有界,  $h$  も有界で,  $\psi_0, \hat{\psi}_0 \in L^1$  より

$$\int_R dy \int_0^\infty \text{abs}\left(|\vec{\Psi}_0(y) \vec{\Psi}_0(y - t)|\right) dt \leq 2\|\psi_0\|_{L^1}\|\hat{\psi}_0\|_{L^1} < \infty$$

なので ( $\text{abs}(x)$  は  $x$  の絶対値), Lebesgue 収束定理により,  $w > z$  では

$$\int_R h(a)I_2 da \rightarrow h(w) \left| \vec{Q}(w) \vec{R}(w) \right| I_5, \quad I_5 = \int_R dy \int_0^\infty \left| \vec{\Psi}_0(y) \vec{\Psi}_0(y - t) \right| dt \quad (34)$$

に収束し,  $w = z$  では 0 となることがわかる.

$h(a)I_3$  の積分も同様に,

$$\int_R h(a)I_3 da = \int_R h(a) da \int_z^w \left| \vec{Q}(z) \vec{R}(s) \right| \left| \vec{\Psi}_n(s) \vec{\Psi}_n(z) \right| ds$$

で  $a$  を  $n(z - a) = y$  と置換し,  $s$  を  $n(s - z) = t$  と置換すると,  $a = z - y/n$ ,  $s = z + t/n$  で,

$$\vec{\Psi}_n(z) = n\vec{\Psi}_0(n(z - a)) = n\vec{\Psi}_0(y), \quad \vec{\Psi}_n(s) = n\vec{\Psi}_0(n(s - z)) = n\vec{\Psi}_0(y + t)$$

より,

$$\begin{aligned} & \int_R h(a)I_3 da \\ &= \int_R h\left(z - \frac{y}{n}\right) dy \int_0^{n(w-z)} \left| \vec{Q}(z) \vec{R}\left(z + \frac{t}{n}\right) \right| \left| \vec{\Psi}_0(y + t) \vec{\Psi}_0(y) \right| dt \end{aligned}$$

なので,  $I_2$  の場合と同様に有界性が言え, その極限は,  $w > z$  では

$$\int_R h(a)I_3 da \rightarrow h(z) \left| \vec{Q}(z) \vec{R}(z) \right| I_6, \quad I_6 = \int_R dy \int_0^\infty \left| \vec{\Psi}_0(y + t) \vec{\Psi}_0(y) \right| dt \quad (35)$$

に収束し,  $w = z$  では 0 となる.

(34), (35) の極限の値を求めるために,  $R_j$  の  $w, z$  での値をまず計算する. (18), (22) より,

$$\begin{aligned} R_1(s) &= (-1)^{m+1} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{m+1} (w - s)^m (s - z)^m, \\ R_2(s) &= -\theta(-1)^{m+1} \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^{m+1} (w - s)^{m+1} (s - z)^m \end{aligned}$$

なので,

$$\begin{cases} R_1(w) &= (-1)^{m+1}(m+1)(-1)^m m! m(w-z)^{m-1} = -m(m+1) \frac{u}{w-z} \\ R_1(z) &= (-1)^{m+1}(m+1)(-m)(w-z)^{m-1} m! = (-1)^m m(m+1) \frac{u}{w-z} \\ R_2(w) &= (-1)^m \theta(m+1)! (-1)^{m+1} (w-z)^m = -\theta(m+1)u \\ R_2(z) &= (-1)^m \theta(m+1)(-1)(m+1)(w-z)^m m! = (-1)^{m+1} \theta(m+1)^2 u \end{cases} \quad (36)$$

となる. よって, (19), (36) により,

$$\begin{aligned} |\vec{Q}(w) \vec{R}(w)| &= \begin{vmatrix} u & -\frac{m(m+1)u}{w-z} \\ 0 & -\theta(m+1)u \end{vmatrix} = -\theta(m+1)u^2, \\ |\vec{Q}(z) \vec{R}(z)| &= \begin{vmatrix} (-1)^m u & (-1)^m \frac{m(m+1)u}{w-z} \\ (-1)^{m+1} \theta(w-z)u & (-1)^{m+1} \theta(m+1)^2 u \end{vmatrix} \\ &= -\theta(m+1)u^2 \begin{vmatrix} 1 & \frac{m}{w-z} \\ w-z & m+1 \end{vmatrix} = -\theta(m+1)u^2 \end{aligned}$$

となって, 同じ値となる. また,  $I_6$  は, 置換して順序交換すれば,

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_R dy \int_0^\infty |\vec{\Psi}_0(y+t) \vec{\Psi}_0(y)| dt = \int_R dy \int_y^\infty |\vec{\Psi}_0(s) \vec{\Psi}_0(y)| ds \\ &= \int_R ds \int_{-\infty}^s |\vec{\Psi}_0(s) \vec{\Psi}_0(y)| dy = \int_R ds \int_0^\infty |\vec{\Psi}_0(s) \vec{\Psi}_0(s-t)| dt = I_5 \end{aligned}$$

となる. よって, これらを総合すると,  $\int_R h(a) B_n da$  は  $w, z \in [z_1, w_1]$  に関して一様有界で,

$$\int_R h(a) B_n da \rightarrow -\theta(m+1)u^2 \{h(w) + h(z)\} I_5 \quad (37)$$

となる.

$h(a)$  は  $[z_1, w_1]$  の外では 0 なので, Fubini の定理より,

$$\left\langle \int_R h(a) B_n da \right\rangle = \int_R h(a) \langle B_n \rangle da \quad (38)$$

が成り立つが, 命題 4 より, この右辺は  $n \rightarrow \infty$  に対して

$$\int_R h(a) \langle B_n \rangle da = \int_{z_1}^{w_1} h(a) \langle B_n \rangle da \rightarrow 0$$

となる. また, (38) の左辺は (37) と Lebesgue 収束定理より

$$\left\langle \int_R h(a) B_n da \right\rangle \rightarrow -\theta(m+1) I_5 \langle u(w-z)^2 \{h(w) + h(z)\} \rangle$$

となる. よって, (32) を満たし, かつ  $I_5 \neq 0$  となる  $\psi_0, \hat{\psi}_0$  が取れれば,

$$\langle (w-z)^{2m} \{h(w) + h(z)\} \rangle = 0 \quad (39)$$

が得られることになる。

そのような  $\psi_0, \psi_1$  の存在は、以下のように保証される。例えば 0 ではない  $\psi_0, \psi_1$  を  $\psi_0, \psi_1 \in \mathcal{S}$  (= 急減少関数の族) で

$$\psi_0 \geq 0, \quad \psi_1(0) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y)\psi_1(y)dy \neq 0 \quad (40)$$

なるものとする。それに対して  $\hat{\psi}_0(y) = \psi_0(y) + \psi_1'(y)$  とすると、これらは (16) を満たし、

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y)dy &> 0, \\ \int_{\mathbb{R}} \hat{\psi}_0(y)dy &= \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y)dy + \int_{\mathbb{R}} \psi_1'(y)dy = \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y)dy > 0, \\ \int_0^{\infty} \hat{\psi}_0(y)dy &= \int_0^{\infty} \psi_0(y)dy + \int_0^{\infty} \psi_1'(y)dy = \int_0^{\infty} \psi_0(y)dy - \psi_1(0) \\ &= \int_0^{\infty} \psi_0(y)dy \end{aligned}$$

なので  $r = \hat{r}$  となり、また

$$\begin{aligned} \left| \vec{\Psi}_0(y) \vec{\Psi}_0(y-t) \right| &= \begin{vmatrix} \psi_0(y) & \psi_0(y-t) \\ \psi_0(y) + \psi_1'(y) & \psi_0(y-t) + \psi_1'(y-t) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \psi_0(y) & \psi_0(y-t) \\ \psi_1'(y) & \psi_1'(y-t) \end{vmatrix} = \psi_0(y)\psi_1'(y-t) - \psi_1'(y)\psi_0(y-t) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_{\mathbb{R}} dy \int_0^{\infty} \{\psi_0(y)\psi_1'(y-t) - \psi_1'(y)\psi_0(y-t)\}dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} dy \int_{-\infty}^y \psi_0(y)\psi_1'(s)ds - \int_{\mathbb{R}} dy \int_{-\infty}^y \psi_1'(y)\psi_0(s)ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y)\psi_1(y)dy - \int_{\mathbb{R}} ds \int_s^{\infty} \psi_1'(y)\psi_0(s)dy = 2 \int_{\mathbb{R}} \psi_0(y)\psi_1(y)dy \end{aligned}$$

となるので  $I_5 \neq 0$  となる。実際に (40) を満たす  $\psi_0, \psi_1$  としては、例えば

$$\psi_0(y) = e^{-y^2}, \quad \psi_1(y) = y^2 e^{-y^2} \quad (41)$$

などがある。

## 7 Young 測度の決定

前節の (39) から、 $\nu = \delta_{(w_1, z_1)}$  であることを示す。

命題 2 より、 $(w-z)^{2m}\{h(w)+h(z)\}$  は 0 以上で、 $\Sigma(w_1, z_1)$  上で 0 になるのは  $w=z$  か、または  $w > z$  で  $(w, z) = (w_1, z_1)$  の場合のみである。

よって、(39) より、 $\nu$  の台はそこに含まれることになり、台が  $\{w=z\}$  に含まれる非負の測度  $\mu$  により

$$\nu = c_0 \delta_{(w_1, z_1)} + \mu \quad (42)$$



の形に書けるが、 $\nu$  の台は点  $(w_1, z_1)$  を含むから  $c_0 > 0$  である.

一方, Tartar 方程式より

$$\langle B_{0,1} \rangle = \langle \eta^{(0)} \rangle \langle \sigma^{(1)} \rangle - \langle \eta^{(1)} \rangle \langle \sigma^{(0)} \rangle$$

が成り立つが, この  $\nu$  の被積分関数はいずれも  $w = z$  で 0 で, よって (42) より,

$$c_0 B_{0,1}(w_1, z_1) = c_0^2 (\eta^{(0)} \sigma^{(1)} - \eta^{(1)} \sigma^{(0)}) \Big|_{(w,z)=(w_1,z_1)} = c_0^2 B_{0,1}(w_1, z_1)$$

となり,  $B_{0,1}(w_1, z_1) = \theta(\eta^{(0)})^2(w_1, z_1) > 0$  より  $c_0 = c_0^2$  となるので  $c_0 = 1$  となる.  $\nu$  も  $\delta_{(w_1, z_1)}$  も全測度 1 なので, よって  $\mu = 0$  となり, これで  $\nu = \delta_{(w_1, z_1)}$  が得られる.

なお, 本節の議論は標準的な手法<sup>[9]</sup> であり, 改良点は特にない.

## 8 最後に

本稿では, 1次元等エントロピー流に対する補償コンパクト性理論による, Tartar 方程式の解法の後半部分に関する DiPerna<sup>[3]</sup>, Ding-Chen-Luo<sup>[2]</sup> らの方法の改良を, DiPerna<sup>[3]</sup> の扱った断熱指数に対して, 5, 6 節で紹介した. (25) を使うこと, および  $B_n$  の極限を考える代わりに,  $h(a)$  倍の積分の極限 (37) を考えることがその主な部分である.

この改良によって, DiPerna<sup>[3]</sup> の結果よりも良いことが示されたわけではないが, 証明が多少シンプルになり, 証明に使われるエントロピーに対する制約が多少緩められ,  $\psi_0, \hat{\psi}_0$  は (16) と (32) の条件, および (34) の  $I_5$  が 0 でないものを取ればよいこと, 例えば (41) のような簡単な関数で構成できることがわかる.

一方この方法を, 一般の  $1 < \gamma \leq 5/3$  に対する Ding-Chen-Luo<sup>[2]</sup> の結果に適用すると, 彼らの膨大な計算を簡略化できる可能性があるだけでなく,  $\gamma$  に関する条件を  $1 < \gamma \leq 2$  か  $1 < \gamma < 3$  まで広げられる可能性もある. それについても今後紹介したいと思うが, 存在定理はすでに一般の  $\gamma > 1$  に対して示されているので, その改良により特に新しい結果が得られるわけではない. しかし, さらに一般の  $P(\rho)$  に結果を拡張する場合にはこのような簡略化の考察が解決につながる可能性はあるし, この分野の学習を多少容易にすることにはなるので, 意味のないことではないと考える.

## 文献

- [1] G.Q.Chen and P.G.LeFloch: Compressible Euler equations with general pressure law; *Arch.Rat.Mech.Anal* **153**, 221–259, 2000.
- [2] X.X.Ding, G.Q.Chen, and P.Z.Luo: Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (I)–(III); *Acta Mathematica Scientia* **5**, 415–432, 1985, 433–472, 1985, **6**, 75–120, 1986.
- [3] R.J.DiPerna: Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics; *Comm.Math.Phys.* **91**, 1–30, 1983.

- [4] P.L.Lions, B.Perthame, and P.E.Souganidis: Existence and stability of entropy scheme for the hyperbolic system of isentropic gas dynamics in Eulerian and Lagrangian coordinates; *Comm.Pure Appl.Math.* **49**, 599–638, 1996.
- [5] P.L.Lions, B.Perthame, and E.Tadmor: Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems; *Comm.Math.Phys.* **163**, 415–431, 1994.
- [6] Y.G.Lu: “*Hyperbolic conservation laws and the compensated compactness method*”; Chapman & Hall/CRC, 2003.
- [7] T.Makino: Weak solutions to the compressible Euler equation with an asymptotic  $\gamma$ -law; *J.Math.Kyoto Univ.* **41**, 557–592, 2001.
- [8] P.D.Serre: La compacité par compensation pour les systèmes hyperboliques non linéaires de deux équations a une dimension d’espace; *J.Math.Pures Appl.* **75**, 423–468, 1986.
- [9] 竹野茂治: 1次元理想気体に対する補償コンパクト法; 新潟工科大リポジトリ (2010) <http://id.nii.ac.jp/1714/00000900/>
- [10] 竹野茂治: compensated compactness と保存則方程式について; 京都大学数理解析研究所講究録 No.1284 78–104, 2002.